Министерство образования Республики Беларусь

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ»

Ю.Ю. Гнездовский, В.Н. Горбузов, А.Ф. Проневич

СПРАВОЧНИК ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

Гродно
ГрГУ им. Я. Купалы
2009

УДК 514.116(035.5)
ББК 22.151.0я2
Г 56

Р е ц е н з е н т ы :

Денисковец А.А., кандидат физико-математических наук, доцент (Гродненский государственный аграрный университет);

Макарова Н.П., кандидат педагогических наук, доцент (Гродненский государственный университет им. Я. Купалы).

Гнездовский, Ю.Ю.

Г 56 Справочник по тригонометрии / Ю.Ю. Гнездовский, В.Н. Горбузов, А.Ф. Проневич. – Гродно, ГрГУ, 2009. – 99 с.

ISBN 985-469-141-1.

Справочник содержит формулы преобразования тригонометрических и обратных тригонометрических выражений; свойства и графики тригонометрических и обратных тригонометрических функций; методы решения тригонометрических и обратных тригонометрических уравнений и неравенств, а также приложения тригонометрии в планиметрии.

Предназначен для учащихся общеобразовательных школ, гимназий, лицеев и колледжей, учителей. Будет полезен студентам, а также преподавателям математических, естественных и общетехнических дисциплин вузов.

УДК 514.116(035.5)
ББК 22.151.0я2

ISBN 985-469-141-1

Введение

Понятие «*тригонометрия*» (от греч. $\tau\rho\iota\gamma\omega\nu o\nu$ — «треугольник», «музыкальный инструмент, похожий на арфу» и $\mu\varepsilon\tau\rho\varepsilon\omega$ — «мерить», «измерять») в переводе на русский язык означает «измерение треугольников».

Термин «*синус*» (от лат. слова sinus, что означает «тетива», «изгиб», «выпуклость», «вздутие») является переводом арабского слова «джива» («тетива лука»), которым обозначали синус индийские математики.

Понятие «*тангенс*» происходит от латинского слова tango, которое переводится «трогать», «(при)касаться», т.е. слово «тангенс» означает «касательная».

Термин «*секанс*» произошел от латинского слова seco, которое означает «рассекать», «разрезать», «отсекать».

Термины «тангенс» и «секанс» предложил датский математик Томас Финк (Финке) в 1583 г.

Названия «*косинус*» и «*котангенс*» образованы с помощью сокращения «co» латинского слова complementum, которое означает «дополнение». Этим выражается тот факт, что $\cos\varphi$ и $\operatorname{ctg}\varphi$ равны соответственно синусу и тангенсу угла, дополнительного к φ до $\dfrac{\pi}{2}$:

$$\cos\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right), \qquad \operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Термины «косинус» и «котангенс» впервые использовал английский математик и астроном Эдмонт Гунтер (Гюнтер) в 1620 г.

Знаки $\sin$, $\cos$ и tg введены Леонардом Эйлером: $\sin$ и $\cos$ — в 1748 г.; tg — в 1753 г.

Знак $\arcsin$ для арксинуса (arc — сокращение латинского arcus, которое означает «дуга (величина дуги или величина угла)») был введен в 1772 г. французским математиком Жозефом Лагранжем.

Число π обозначается первой буквой греческих слов $\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\varepsilon\iota\alpha$, которое означает «круг», «поверхность кругового тела», и $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\nu$, которое означает «окружность».

Греческую букву π как обозначение отношения длины окружности к диаметру впервые использовал в 1706 г. английский математик Уильям Джонс (Джоунз). Это обозначение стало общепринятым после работ Леонарда Эйлера с 1736 г.

1. Окружность

Окружностью называется множество точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной точки, лежащей в той же плоскости и называемой ее ***центром***[1].

Отрезок, соединяющий любую точку окружности с ее центром, называется ***радиусом***[2] окружности; радиусом окружности называют также и длину этого отрезка.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется ***хордой***[3] окружности.

Прямая, пересекающая окружность, называется ***секущей***[4]. Отрезок секущей с концами на окружности — хорда.

Хорда, проходящая через центр окружности, называется ***диаметром***[5] этой окружности.

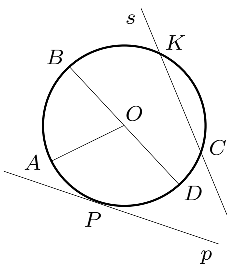


Рис. 1

Длина диаметра окружности равна удвоенной длине ее радиуса:

$$d = 2r,$$

где d — длина диаметра, r — радиус.

Прямая, имеющая одну общую точку с окружностью, — ***касательная*** к окружности, а общая точка — ***точка касания***.

На рис. 1 изображена окружность с центром в точке O. Отрезок BD — диаметр окружности; отрезки BD и CK — хорды окружности; каждый из отрезков OA, OB и OD — радиус окружности. Прямая s — секущая. Прямая p касается окружности в точке P.

Длина окружности радиуса r равна $2\pi r$:

$$l = 2\pi r.$$

Две окружности, имеющие общий центр и лежащие в одной плоскости, называются ***концентрическими***[6].

[1] Термин «центр» (от лат. centrum, от греч. $\varkappa\varepsilon\nu\tau\rho o\nu$) означает «место, где стоит неподвижная ножка циркуля при описании круга (окружности)».

[2] Термин «радиус» (от лат. radius) означает «спица колеса», «луч».

[3] Термин «хорда» (от греч. $\xi o\rho\delta\eta$) означает «струна (из кишки)», «жила».

[4] Термин «секущая» (от лат. seco) означает «рассекать», «разрезать», «отсекать».

[5] Термин «диаметр» (от греч. $\delta\iota\alpha\mu\varepsilon\tau\rho o\zeta$) означает «поперечник», «колибр (орудия)».

[6] Понятие «концентрические (окружности)» (от лат. con — «вместе» и centrum — «центр»).

Уравнение окружности в прямоугольных декартовых координатах x, y имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

где (a,b) — координаты центра окружности, а r — ее радиус.

Уравнением окружности радиуса r с центром в начале O прямоугольной декартовой системы координат Oxy является

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

2. Круг

Кругом с ***центром*** O и ***радиусом*** r называется множество точек плоскости, расстояние от каждой из которых до точки O, лежащей в плоскости, не превышает длины радиуса r.

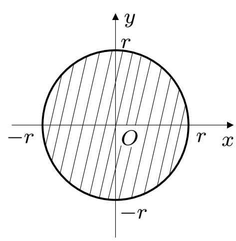


Рис. 2

Границей круга с центром O и радиусом r является окружность с центром O и радиусом r. Границу круга называют ***окружностью круга***.

Площадь круга радиуса r равна πr^2:

$$S = \pi r^2.$$

В прямоугольных декартовых координатах x, y множество точек, координаты которых удовлетворяют нестрогому неравенству

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2,$$

является кругом радиуса r, где (a,b) — координаты центра этого круга.

Кругом с центром в начале O прямоугольной декартовой системы координат Oxy и радиусом r (рис. 2) является множество точек, координаты которых удовлетворяют нестрогому неравенству

$$x^2 + y^2 \leqslant r^2.$$

3. Плоский угол

Плоским углом называется одна из частей плоскости, ограниченная двумя лучами с общим началом. Эти лучи называются ***сторонами*** угла, а их общее начало — ***вершиной*** угла.

Стороны плоского угла называются его ***границей***.

Плоские углы в дальнейшем будем называть кратко ***углами***.

Угол обозначается либо указанием его вершины: «***угол A***», либо указанием его сторон: «***угол*** $(\boldsymbol{ab})$», либо указанием трех точек: «***угол*** $\boldsymbol{AOB}$» — вершины O, а также двух точек A и B, лежащих на сторонах a и b (рис. 3).

Слово «угол» иногда заменяют символом $\angle$.

Тогда угол обозначается: $\boldsymbol{\angle A}$; $\boldsymbol{\angle(ab)}$; $\boldsymbol{\angle AOB}$.

Угол называется ***выпуклым***, если прямолинейный отрезок, соединяющий две его любые точки, целиком содержится в этом угле.

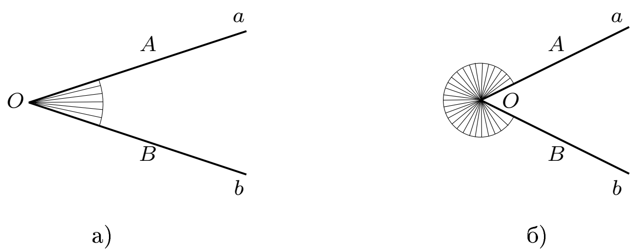


Рис. 3

Угол, построенный на рис. 3а, является выпуклым; угол, построенный на рис. 3б, — невыпуклым.

Всякий выпуклый угол есть пересечение двух полуплоскостей.

Различные лучи одной и той же прямой с общим началом называются ***дополнительными лучами*** или ***дополнительными полупрямыми***.

Если стороны угла являются дополнительными лучами, то угол называется ***развернутым*** (рис. 4).

Граница угла, отличного от развернутого, делит плоскость на два множества точек, одно из которых выпуклое, другое — невыпуклое.

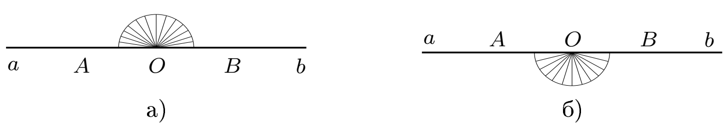


Рис. 4

Точки плоскости, принадлежащие углу и не лежащие на его границе, называются ***внутренними*** точками угла. Точки плоскости, не принадлежащие углу, называются ***внешними*** точками угла.

Два угла называются ***смежными***, если их объединением является развернутый угол, а пересечением — луч.

Смежные углы имеют общую сторону — луч, а две другие их стороны являются дополнительными лучами.

На рис. 5 углы (ab) и (bc) смежные: сторона b — общая, стороны a и c — дополнительные лучи.

Два выпуклых угла, центрально симметричных относительно их общей вершины, называются ***вертикальными***[1].

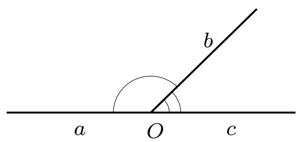


Рис. 5

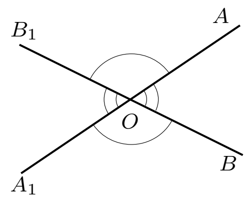


Рис. 6

На рис. 6 углы AOB и A_1OB_1 вертикальные, а также вертикальными являются углы A_1OB и AOB_1.

4. Центральные и вписанные углы

Центральным углом в окружности называется угол, вершина которого совпадает с центром этой окружности.

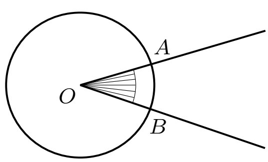


Рис. 7

Часть окружности, расположенная внутри центрального угла, называется ***дугой*** окружности, соответствующей этому центральному углу.

Дугу окружности называют ***круговой дугой*** и говорят о центральном угле, ***опирающемся*** на соответствующую ему круговую дугу.

Если круговая дуга лежит на окружности радиуса r, то ее называют ***круговой дугой радиуса*** r.

Круговая дуга обозначается указанием двух точек, в которых окружность пересекают стороны центрального угла, опирающегося на эту дугу: «***дуга AB***». Слово «дуга» иногда заменяют символом $\smile$ и пишут $\smile\!\boldsymbol{AB}$ вместо «дуга AB».

[1] Понятие «вертикальные (углы)» (от лат. vertex) означает «вершина» («вертикальные» углы — «привершинные» углы).

На рис. 7 угол AOB — центральный угол окружности, его вершина O является центром данной окружности, а стороны OA и OB пересекают окружность соответственно в точках A и B. Дуга AB является частью окружности, расположенной внутри центрального угла. Центральный угол AOB опирается на круговую дугу AB.

Две различные точки A и B, лежащие на окружности, определяют две круговые дуги на ней. Чтобы различить эти дуги, поступают по-разному. Используют указание того центрального угла, который на нее опирается (как это показано на рис. 7, где центральный угол изображен штриховкой). Обозначают дугу тремя буквами: $\boldsymbol{\smile AcB}$, где буквой c обозначена некоторая точка, лежащая на этой дуге AB и отличная от точек A и B.

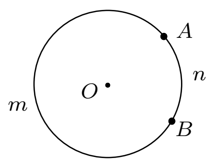
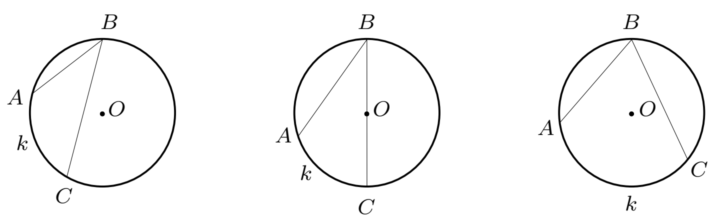


Рис. 8

На рис. 8 изображены две круговые дуги с конечными точками A и B: $\smile AnB$ и $\smile AmB$. Длина дуги AnB меньше длины дуги AmB. Объединением дуг $\smile AnB$ и $\smile AmB$ является окружность, на которой они лежат. Дуга AnB без концов дополняет дугу AmB до окружности, а дуга AmB без концов дополняет дугу AnB до окружности: $\smile AnB$ и $\smile AmB$ — ***взаимно дополняющие*** круговые дуги.

Длины взаимно дополняющих круговых дуг в сумме равны длине окружности, на которой они лежат.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется ***вписанным в окружность***.



а) б) в)

Рис. 9

Круговая дуга AC, не содержащая вершины B, называется дугой, на которую ***опирается*** вписанный угол ABC.

На рис. 9 изображены вписанные углы ABC с различным расположением относительно центра O окружности, в которую они вписаны. На рис. 9а центр O является внешней точкой вписанного угла ABC; на рис. 9б центр O лежит на стороне BC вписанного угла ABC; на рис. 9в центр O является внутренней точкой вписанного угла ABC. Вписанный угол ABC опирается на круговую дугу AkC.

5. Градусная и радианная меры угла

Для измерения углов, как и отрезков, за единицу измерения принимают некоторый определенный угол, с помощью которого измеряют остальные углы.

Общеприняты две меры углов: градусная и радианная.

Углом в один ***градус***[1] называется центральный угол, опирающийся на круговую дугу, длина которой равна $\dfrac{1}{360}$ части длины ее окружности.

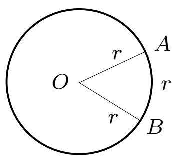


Рис. 10

Величина угла в один градус обозначается **1°**.

Угловая минута — $\dfrac{1}{60}$ часть градуса.

Одна угловая минута обозначается $\mathbf{1'}$.

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}.$$

Угловая секунда[2] — $\dfrac{1}{60}$ часть минуты. Одна угловая секунда обозначается $\mathbf{1''}$.

$$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'.$$

Углом в один ***радиан*** называется центральный угол, опирающийся на круговую дугу, длина которой равна радиусу ее окружности (рис. 10):

$$180^\circ = \pi \textit{ рад}; \quad n^\circ = \frac{\pi n}{180} \textit{ рад}; \quad \varphi \textit{ рад} = \frac{\varphi}{\pi}\cdot 180^\circ;$$

$$1^\circ \approx 0{,}017453 \textit{ рад}; \quad 1' \approx 0{,}000291 \textit{ рад};$$

$$1'' \approx 0{,}000005 \textit{ рад}; \quad 1 \textit{ рад} \approx 57^0 17' 44'',8.$$

[1] Термин «градус» (от лат. gradus) означает «шаг», «ступень».

[2] Понятие «секунда» (от лат. secunda divisio) означает «второе деление части градуса или часа». Выражает, что $1'' = \dfrac{1^\circ}{60^2}$.

В табл. 1 приведены градусные и соответствующие радианные меры часто встречающихся углов.

Таблица 1

Градусы	0	15	30	45	60	75	90	120	135	150	165	180	225	270	315	360
Радианы	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π

Радианную меру угловых величин считают основной и обозначение *рад* опускают, т.е. пишут:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017453, \qquad 30^\circ = \frac{\pi}{6} \quad \text{и др.}$$

То, что величина угла AOB равна n° или φ радианов, выражается записью $\boldsymbol{\angle AOB = n^\circ}$ соответственно $\boldsymbol{\angle AOB = \varphi}$.

Часто углы называют их величинами. Например, угол AOB, величина которого равна φ радианов, называют ***углом*** $\boldsymbol{\varphi}$.

Угол в 360° (или, что то же, 2π радианов) называется ***полным***. Полный угол заполняет всю плоскость.

Величина развернутого угла (рис. 4) равна 180° (π радианов).

Сумма величин смежных углов равна 180° (π радианов). Так, для смежных углов на рис. 5 сумма

$$\angle(ab) + \angle(bc) = 180^\circ \quad \text{или} \quad \angle(ab) + \angle(bc) = \pi.$$

Угол, по величине равный своему смежному, называется ***прямым***. Величина прямого угла равна половине величины развернутого угла и содержит 90° $\left(\frac{\pi}{2}\text{ радианов}\right)$.

Острым углом называется угол, величина которого меньше прямого угла, т.е. меньше $\frac{\pi}{2}$.

Иначе говоря, острый угол — угол, величина которого меньше величины смежного с ним угла.

Угол (bc) на рис. 5 — острый.

Тупым углом называется угол, по величине больший величины прямого угла и меньший величины развернутого угла, т.е. больший $\frac{\pi}{2}$, но меньший π.

Больший из смежных углов, отличный от развернутого, является тупым углом.

Угол (ab) на рис. 5 — тупой.

Если у угла, отличного от развернутого, внутренняя область является выпуклой, то величина угла меньше величины развернутого угла, т.е. меньше π (рис. 3а).

Если внутренняя область угла невыпуклая, то величина угла больше величины развернутого угла, т.е. больше π (рис. 3б). При этом считаем, что у полного угла стороны совпадают. Полный угол является невыпуклым.

Дополнительным углом к углу φ называется угол, величина которого равна $\dfrac{\pi}{2} - \varphi$ (углы названы их величинами).

Вертикальные углы равны по величине.

Две пересекающиеся прямые образуют вертикальные и смежные углы. Величина меньшего из них называется ***углом между прямыми***.

Величина угла AOB (или равного по величине ему вертикального угла A_1OB_1) есть угол между пересекающимися прямыми A_1A и B_1B, изображенными на рис. 6.

6. Тригонометрические функции острого угла

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе и обозначается условным знаком **sin** (рис. 11):

$$\sin A = \frac{a}{c}\,.$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе и обозначается условным знаком **cos** (рис. 11):

$$\cos A = \frac{b}{c}\,.$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету и обозначается условным знаком **tg** (рис. 11):

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}\,.$$

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету и обозначается условным знаком **ctg** (рис. 11):

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}\,.$$

Секансом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение гипотенузы к прилежащему катету и обозначается условным знаком **sec** (рис. 11):

$$\sec A = \frac{c}{b}\,.$$

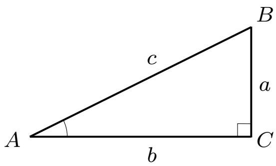


Рис. 11

Косекансом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение гипотенузы к противолежащему катету и обозначается условным знаком **cosec** (рис. 11):

$$\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}\,.$$

Синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс острого угла называются ***тригонометрическими функциями острого угла***. Имеют место связи:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A}\,; \quad \sec A = \frac{1}{\cos A}\,; \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}\,.$$

О б р а т и т е   в н и м а н и е:

• Синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс острого угла треугольника зависят только от величины угла.

7. Решение прямоугольных треугольников

У прямоугольного треугольника ACB (рис. 11) прописными буквами A, B, C обозначены как вершины, так и величины внутренних углов, при этом угол C — прямой; a и b — катеты, противолежащие соответственно вершинам A и B; c — гипотенуза.

Теорема Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Формула названа в честь древнегреческого математика Пифагора (около 570 – около 500 гг. до н.э.). Это утверждение было известно задолго до Пифагора, возможно, за тысячелетие до него. Заслуга же Пифагора в том, что он доказал эту формулу.

В прямоугольном треугольнике по острому углу и одной из сторон, а также по двум сторонам находятся другие его стороны и углы.

Таблица 2

Данные	Решение
A, c	$B = 90^\circ - A; \quad a = c \sin A; \quad b = c \cos A$
A, a	$B = 90^\circ - A; \quad b = a \operatorname{ctg} A; \quad c = \dfrac{a}{\sin A}$
a, c	$\sin A = \dfrac{a}{c}; \quad B = 90^\circ - A; \quad b = c \cos A; \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$
a, b	$\operatorname{tg} A = \dfrac{a}{b}; \quad B = 90^\circ - A; \quad c = \dfrac{a}{\sin A}; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$

8. Градусная и радианная меры круговых дуг

Для измерения круговых дуг, как отрезков и углов, за единицу измерения принимают некоторую определенную дугу окружности, с помощью которой измеряют остальные круговые дуги.

Подобно углам круговые дуги измеряют в градусах и радианах.

Круговой дугой в один ***градус*** называется круговая дуга, длина которой равна $\dfrac{1}{360}$ длины ее окружности.

Радианная мера круговой дуги определяется как отношение ее длины к радиусу окружности, на которой она расположена.

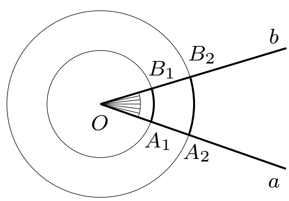


Рис. 12

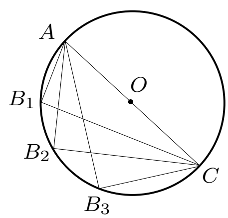


Рис. 13

Круговой дугой в один ***радиан*** называется дуга окружности, длина которой равна длине радиуса этой окружности.

То, что величина круговой дуги AB равна n° или φ радианов выражается записью $\smile\boldsymbol{AB = n^\circ}$ соответственно $\smile\boldsymbol{AB = \varphi}$.

О б р а т и т е   в н и м а н и е:

- Градусная и радианная меры круговых дуг и углов не зависят от радиуса окружности, а зависят только от соответствующего центрального угла.
- Градусная (радианная) величина круговой дуги численно равна градусной (радианной) величине центрального угла, который на нее опирается.

Поэтому градусную и радианную меры круговых дуг иногда называют ***угловыми мерами*** круговых дуг.

На рис. 12 построены две концентрические окружности радиусов r_1 и r_2 соответственно, когда $r_1 < r_2$, и центральный угол (ab). Сторона a пересекает эти окружности в точках: A_1 — точка пересечения с окружностью радиуса r_1 и A_2 — точка пересечения с окружностью радиуса r_2. Аналогично сторона b пересекает эти окружности в точках: B_1 — точка пересечения с окружностью радиуса r_1 и B_2 — точка пересечения с окружностью радиуса r_2. Круговая дуга A_1B_1 лежит на окружности радиуса r_1, а круговая дуга A_2B_2 лежит на окружности радиуса r_2. По угловой величине эти дуги равны: $\smile A_1B_1 = \smile A_2B_2$. Длины у них разные: длина дуги A_1B_1 меньше длины дуги A_2B_2.

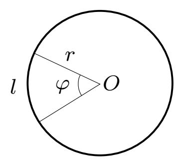


Рис. 14

Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается. Или, что то же, величина вписанного угла равна половине величины центрального угла, который опирается на ту же дугу, что и вписанный угол.

Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым (рис. 13). Иногда величину прямого угла обозначают d.

На рис. 13 $\angle AB_1C = \angle AB_2C = \angle AB_3C = d$.

9. Круговой сектор

Круговым сектором[1] называется часть круга, ограниченная двумя его радиусами и дугой окружности круга.

Условные обозначения (рис. 14): r — радиус окружности; φ — радианная мера круговой дуги, ограничивающей сектор (центрального угла); n° — градусная мера круговой дуги, ограничивающей сектор (центрального угла); l — длина круговой дуги, ограничивающей сектор; S — площадь сектора.

[1] Слово «сектор» (от позднелат. sector, от лат. seco) означает «разрезаю», «разделяю».

$$l = \frac{\pi r}{180}\,n; \quad l = r\varphi; \qquad S = \frac{\pi r^2}{360}\,n; \quad S = \frac{1}{2}\,r^2\varphi.$$

10. Обобщенная круговая дуга и обобщенный угол

Как в случае направленных отрезков (векторов) различают начальную и конечную точки, так и в случае дуги на окружности различают начальную и конечную точки дуги. Аналогично в случае угла различают начальную и конечную стороны угла.

В плоскости зафиксируем положение луча OA с началом в точке O (рис. 15) и назовем его ***начальной стороной*** угла, а точку A — ***начальной точкой*** круговой дуги. Будем вращать этот луч вокруг точки O до тех пор, пока он не перейдет в положение OB (рис. 15а). При этом точка A опишет круговую дугу AB (рис. 15б). Конечное положение OB вращающегося луча назовем ***конечной стороной*** угла, а точку B — ***конечной точкой*** круговой дуги.

Обобщенной круговой дугой (рис. 15б) называется фигура, описываемая точкой, совершающей круговое движение с указанием направления движения точки, а также ее начального (начальной точки дуги) и конечного (конечной точки дуги) положения.

Обобщенную круговую дугу записывают двумя буквами с дугой перед ними, причем на первом месте стоит буква, обозначающая начало дуги. На рис. 15б это $\smile AB$.

Заметим, что обобщенные дуги $\smile AB$ и $\smile BA$ различны, так как их направления противоположны.

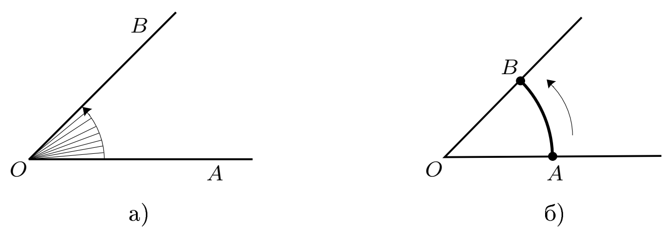


Рис. 15

Для задания обобщенной дуги на окружности указания начальной и конечной точек недостаточно. Надо задать направление движения. На рис. 15б оно указано стрелкой. Можно поступить иначе: задать обобщенную дугу тремя буквами, например $\smile AcB$, где A — начальная точка дуги, B — конечная ее точка, а c — точка, лежащая на дуге и отличная от точек A и B (такое задание см. на рис. 8).

Обобщенным углом (рис. 15а) называется плоская фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки, которая называется ***вершиной*** обобщенного угла, причем указано, какой из этих лучей считается первым (начальная сторона луча) и как его вращать до совпадения со вторым (конечной стороной угла).

а) б)

Рис. 16

Положительным направлением вращения в плоскости называется вращение против хода часовой стрелки (рис. 16а), а ***отрицательным*** — по движению часовой стрелки (рис. 16б).

11. Измерение обобщенных круговых дуг и углов

Если луч OA вращается в плоскости вокруг точки O в положительном направлении (рис. 16а), то дуга AB, описанная точкой A, и соответствующий этому вращению угол AOB называются ***положительными***. Если вращение луча OC отрицательное (рис. 16б), то соответствующую дугу CD и угол COD называют ***отрицательными***.

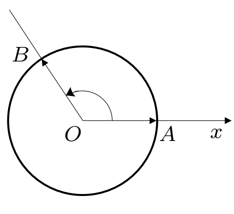


Рис. 17

Круговая дуга (угол) измеряется как в градусах, так и в радианах, действительным числом, абсолютная величина которого равна соответствующей величине дуги (угла), взятой со знаком плюс, если дуга (угол) положительная, и со знаком минус, если дуга (угол) отрицательная.

Если начало и конец круговой дуги (угла) совпадают и при этом не было совершено вращательное движение, то величина этой дуги (угла) равна нулю.

Зафиксируем (рис. 17) горизонтальную ось Ox, и вектор $\overrightarrow{OA}$ на ней. Ось Ox примем за начальную сторону угла AOB, а конец A вектора $\overrightarrow{OA}$ — за начальную точку круговой дуги AB. Подвижным вектором $\overrightarrow{OB}$ определяем конечную сторону обобщенного угла AOB, а его концом (точкой B) — конечную точку обобщенной круговой дуги AB.

Вращением в плоскости вокруг точки O с помощью подвижного вектора $\overrightarrow{OB}$ образуем углы AOB любой величины, а его концом (точкой B) описываем круговые дуги любой величины.

Положение вектора $\overrightarrow{OB}$ не определяет однозначно величину угла AOB и дуги AB.

Так, если вектор $\overrightarrow{OB}$, вращаясь вокруг точки O в положительном направлении, не описывает полного оборота (рис. 17), то

$$\angle AOB = n^\circ \quad \text{и} \quad \smile AB = n^\circ, \text{ где } 0^\circ < n^\circ < 360^\circ$$

(или в радианах: $\angle AOB = \varphi \quad \text{и} \quad \smile AB = \varphi$, где $0 < \varphi < 2\pi$).

Если вектор $\overrightarrow{OB}$ описал три оборота (против хода часовой стрелки) и еще поворот на угол n° (φ радианов), то

$$\angle AOB = 360^\circ \cdot 3 + n^\circ = 1080^\circ + n^\circ$$

и

$$\smile AB = 360^\circ \cdot 3 + n^\circ = 1080^\circ + n^\circ$$

$$(\angle AOB = 2\pi \cdot 3 + \varphi = 6\pi + \varphi \quad \text{и} \quad \smile AB = 2\pi \cdot 3 + \varphi = 6\pi + \varphi).$$

Если о числе оборотов ничего не известно, то

$$\angle AOB = n^\circ + 360^\circ \cdot k \quad \text{и} \quad \smile AB = n^\circ + 360^\circ \cdot k$$

или

$$\angle AOB = \varphi + 2\pi k \quad \text{и} \quad \smile AB = \varphi + 2\pi k,$$

где k — любое целое число.

Таким образом, если не оговорено, то обобщенная круговая дуга и обобщенный угол задаются с точностью до произвольного целого числа оборотов.

Для нахождения суммы нескольких обобщенных углов все обобщенные углы-слагаемые приводят к общей вершине и располагают на плоскости так, чтобы конечная сторона первого угла совместилась с начальной стороной второго, конечная сторона второго — с начальной стороной третьего и т.д. Тогда алгебраической суммой данных углов будет угол, начальная сторона которого совпадает с начальной стороной первого, а конечная — с конечной стороной последнего. Если слагаемые определены однозначно, т.е. указано число оборотов при образовании углов, то и сумма определяется однозначно.

Аналогично выполняется алгебраическое сложение обобщенных круговых дуг одного и того же радиуса, при этом дуги откладываются на окружности, радиус которой равен радиусу дуг.

12. Тригонометрические функции произвольного угла

На плоскости введем прямоугольную декартову систему координат Oxy (рис. 18). Положительную полуось абсцисс будем считать начальной стороной углов, которые образуются при вращении вокруг точки O. Вектор $\overrightarrow{OA}$ сонаправлен с осью Ox, а его длина равна r. Пусть подвижный радиус-вектор $\overrightarrow{OB}$ является конечным положением вращения радиуса-вектора $\overrightarrow{OA}$ и при этом $\angle AOB = \varphi$ (а также $\smile AB = \varphi$), где φ — действительное число.

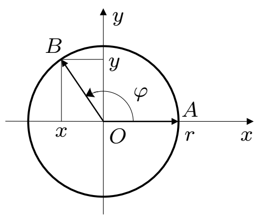


Рис. 18

У точки A координаты $A(r, 0)$, а у точки B координаты обозначаем x и y, т.е. $B(x, y)$. Тогда отношения $\dfrac{x}{r}$, $\dfrac{y}{r}$ и $\dfrac{x}{y}$ не зависят от длины r подвижного радиуса-вектора, а зависят только от величины φ угла AOB.

Следовательно, отношения $\dfrac{x}{r}$, $\dfrac{y}{r}$ и $\dfrac{x}{y}$ можно рассматривать как функции, аргументом которых является произвольный угол φ.

Синусом угла φ, образованного подвижным радиусом-вектором $\overrightarrow{OB}$ с положительной полуосью абсцисс (рис. 18), называется отношение ординаты конца подвижного радиуса-вектора к его длине:

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}.$$

Косинусом угла φ, образованного подвижным радиусом-вектором $\overrightarrow{OB}$ с положительной полуосью абсцисс (рис. 18), называется отношение абсциссы конца подвижного радиуса-вектора к его длине:

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}.$$

Тангенсом угла φ, образованного подвижным радиусом-вектором $\overrightarrow{OB}$ с положительной полуосью абсцисс (рис. 18), называется отношение ординаты к абсциссе конца подвижного радиуса-вектора:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

Котангенсом угла φ, который образован подвижным радиусом-вектором $\overrightarrow{OB}$ с положительной полуосью абсцисс (рис. 18), называется отношение абсциссы к ординате конца подвижного радиуса-вектора:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0).$$

Секансом угла φ, образованного подвижным радиусом-вектором $\overrightarrow{OB}$ с положительной полуосью абсцисс (рис. 18), называется отношение длины подвижного радиуса-вектора к абсциссе его конца:

$$\sec\varphi = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0).$$

Косекансом угла φ, образованного подвижным радиусом-вектором $\overrightarrow{OB}$ с положительной полуосью абсцисс (рис. 18), называется отношение длины подвижного радиуса-вектора к ординате его конца:

$$\operatorname{cosec}\varphi = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0).$$

Косеканс угла φ иногда обозначают $\mathbf{csc}\,\boldsymbol{\varphi}$.

Синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс произвольного угла называются ***тригонометрическими функциями*** произвольного угла.

Существуют и другие подходы определения тригонометрических функций произвольного угла.

Проекции радиуса-вектора точки на координатные оси равны соответствующим координатам этой точки. Обозначим проекцию радиуса-вектора $\overrightarrow{OB}$ на полуось ординат через r_y, а на полуось абсцисс — через r_x. Тогда $r_y = y$, а $r_x = x$.

Следовательно, тригонометрические функции произвольного угла определяются следующими отношениями:

$$\sin\varphi = \frac{r_y}{r}, \qquad \cos\varphi = \frac{r_x}{r}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{r_y}{r_x},$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{r_x}{r_y}, \qquad \sec\varphi = \frac{r}{r_x}, \qquad \operatorname{cosec}\varphi = \frac{r}{r_y}.$$

13. Единичная окружность

Идея единичной окружности была принята в X — XI вв.

Так как тригонометрические функции произвольного угла не зависят от длины подвижного радиуса-вектора, то при введении основных тригонометрических понятий может быть использована единичная окружность.

В координатной плоскости Oxy построим окружность с центром в начале координат O единичного радиуса — ***единичную окружность***.

Точку пересечения единичной окружности с положительной полуосью абсцисс обозначим $\boldsymbol{P_0}$. Это начальная точка круговых дуг единичного радиуса, а радиус-вектор $\overrightarrow{OP_0}$ — орт начальной стороны углов. Через $\boldsymbol{P_\varphi}$ обозначим точку единичной окружности, являющуюся концом круговой дуги величины φ. При этом радиус-вектор $\overrightarrow{OP_\varphi}$ будет ортом конечной стороны угла величины φ.

Обратите внимание:

• На единичной окружности точки P_φ и $P_{\varphi+2\pi k}$ при любом действительном φ и любом целом k совпадают:

$$P_\varphi = P_{\varphi+2\pi k} \ \ \forall\varphi \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Например, при любом целом k точки $P_{2\pi k}$ совпадают и лежат на пересечении единичной окружности с положительной полуосью абсцисс, точки $P_{\frac{\pi}{2}+2\pi k}$ — с положительной полуосью ординат, точки $P_{\pi+2\pi k}$ — с отрицательной полуосью абсцисс, точки $P_{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}$ — с отрицательной полуосью ординат.

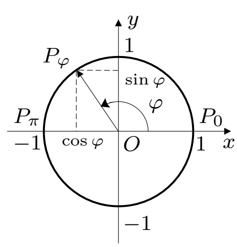


Рис. 19

С помощью единичной окружности тригонометрические функции произвольного угла определяются следующим образом.

Синус угла φ равен ординате конца радиуса-вектора $\overrightarrow{OP_\varphi}$ единичной окружности, образующего угол φ с положительной полуосью абсцисс (рис. 19).

Косинус угла φ равен абсциссе конца радиуса-вектора $\overrightarrow{OP_\varphi}$ единичной окружности, образующего угол φ с положительной полуосью абсцисс (рис. 19).

Осью тангенсов называется ось, касающаяся единичной окружности в точке пересечения ее с положительной полуосью абсцисс и совпадающая по направлению с осью ординат (рис. 20).

Тангенс угла φ равен ординате точки M, являющейся точкой пересечения оси тангенсов с прямой, которая совпадает с радиусом-вектором $\overrightarrow{OP_\varphi}$ единичной окружности, образующим с положительной полуосью абсцисс угол φ.

Осью котангенсов называется ось, касающаяся единичной окружности в точке пересечения ее с положительной полуосью ординат и совпадающей по направлению с осью абсцисс (рис. 21).

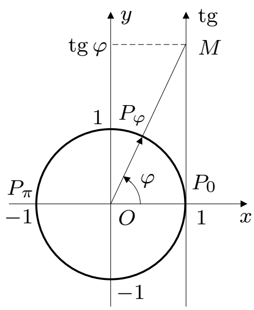


Рис. 20

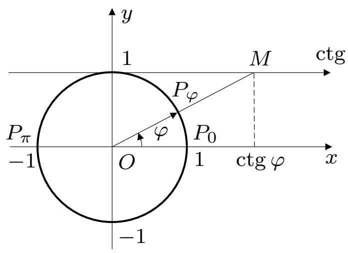


Рис. 21

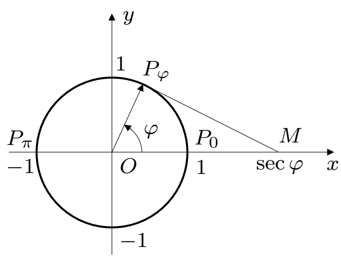


Рис. 22

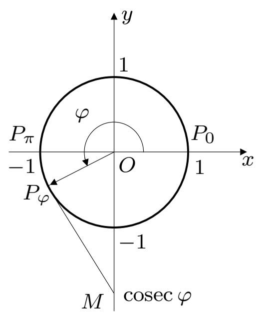


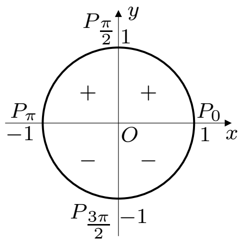
Рис. 23

Котангенс угла φ равен абсциссе точки M, в которой ось котангенсов пересекается с прямой, совпадающей с радиусом-вектором $\overrightarrow{OP_\varphi}$ единичной окружности, образующим с положительной полуосью абсцисс угол φ.

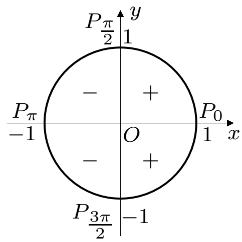
Секанс угла φ равен абсциссе точки M, являющейся точкой пересечения оси абсцисс с касательной к единичной окружности в конце радиуса-вектора $\overrightarrow{OP_\varphi}$, который образует угол φ с положительной полуосью абсцисс (рис. 22).

Косеканс угла φ равен ординате точки M, являющейся точкой пересечения оси ординат с касательной к единичной окружности в конце радиуса-вектора $\overrightarrow{OP_\varphi}$, который образует угол φ с положительной полуосью абсцисс (рис. 23).

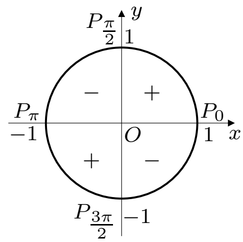
В соответствии с определениями тригонометрических функций на рис. 24 указаны их знаки в координатных четвертях.



Синус и косеканс



Косинус и секанс



Тангенс и котангенс

Рис. 24

14. Решение плоских треугольников

Введем условные обозначения (рис. 25 — 27): A, B, C — внутренние углы треугольника ABC; a, b, c — стороны треугольника ABC, противолежащие соответственно вершинам A, B, C; P — периметр; p — полупериметр; S — площадь; r — радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности; h_a — высота к стороне a.

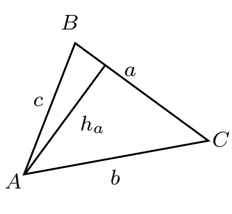


Рис. 25

14.1. Периметр треугольника

$$P = a + b + c.$$

14.2. Площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}\, ah_a. \qquad S = \frac{1}{2}\, ab\sin C.$$

Формула Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

Формула названа в честь древнегреческого математика Герона Александрийского (около I в.).

$$S=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin B\sin C}{\sin A}\,.$$

$$S=p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}\,.$$

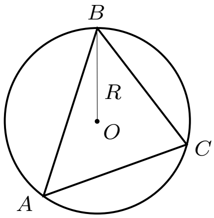


Рис. 26

14.3. Теорема косинусов

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A;$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B;$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

Теорему косинусов знали еще древние греки, ее доказательство содержится во второй книге «Начал» Евклида, которая относится к III в. до н.э.

14.4. Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

Теорема синусов была впервые доказана в X — XI вв. математиками Ближнего и Среднего Востока.

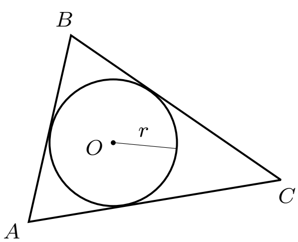


Рис. 27

14.5. Теорема тангенсов

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}\,.$$

Теорема тангенсов открыта в XV в. немецким астрономом и математиком Иоганом Региомонтаном.

14.6. Формулы Мольвейде

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}. \qquad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}.$$

Немецкий математик и астроном Карл Мольвейде эти формулы получил в конце XVIII — начале XIX в.

14.7. Выражение углов треугольника через его стороны

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}. \qquad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

14.8. Выражение радиуса описанной окружности через стороны и углы треугольника

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}.$$

$$R=\frac{a+b+c}{2(\sin A+\sin B+\sin C)}. \qquad R=\frac{p}{4\cos\dfrac{A}{2}\ \cos\dfrac{B}{2}\ \cos\dfrac{C}{2}}.$$

$$R=\frac{abc}{4S}.$$

14.9. Выражение радиуса вписанной окружности через стороны и углы треугольника

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

$$r=\frac{a\sin\dfrac{B}{2}\ \sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}. \qquad r=\frac{S}{p}.$$

14.10. Решение косоугольных треугольников

В треугольнике: а) по трем сторонам; б) по двум сторонам и углу; в) по двум углам и стороне находятся другие его стороны и углы.

Таблица 3

Данные	Решение
a, b, c	$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$; $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$; $\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$
a, B, C	$A=180^\circ-(B+C)$; $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$; $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$
a, b, C	$\frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$. По найденным $\frac{A+B}{2}$ и $\frac{A-B}{2}$ находим A и B. $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$
a, b, A	$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$; $C=180^\circ-(A+B)$; $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$ *Замечание.* Если $a>b$, то B имеет одно значение, меньшее 90°. Если $a<b$, но $a>b\sin A$, то B имеет два значения: $B_1<90^\circ$ и $B_2=180^\circ-B_1$. Каждое из B_1 и B_2 дает свое значение для C и c. В этом случае задача допускает два решения, когда треугольник соответственно остроугольный и тупоугольный. Если $a<b$ и $a=b\sin A$, то $B=90^\circ$ (треугольник прямоугольный). Если $a<b$ и $a<b\sin A$, то $\sin B>1$, что невозможно, и такого треугольника не существует.

15. Круговой сегмент

Круговой сегмент[1] — часть круга, заключенная между дугой окружности круга и хордой, стягивающей эту круговую дугу.

Круговым сегментом является общая часть круга и полуплоскости, граница которой содержит хорду этого круга.

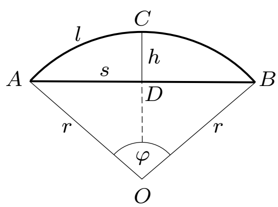


Рис. 28

На рис. 28 построен круговой сегмент с центральным углом AOB, ограниченный круговой дугой ACB радиуса r и хордой AB: φ — величина угла AOB в радианах; n° — величина угла AOB в градусах; l — длина круговой дуги ACB; s — длина хорды AB; S — площадь кругового сегмента; $OC \perp AB$; D — точка пересечения радиуса OC и хорды AB; DC — высота кругового сегмента; h — длина высоты кругового сегмента.

$$AD = DB, \quad \smile AC = \smile CB = \frac{\varphi}{2}, \quad \angle AOC = \angle COB = \frac{\varphi}{2}.$$

15.1. Длина хорды

$$s = 2\sqrt{2hr - h^2}.$$

$$s = 2r\sin\frac{\varphi}{2} \quad \text{или} \quad s = 2r\sin\frac{n^\circ}{2}.$$

15.2. Длина круговой дуги

$$l = r\varphi \quad \text{или} \quad l = \frac{\pi r}{180}\, n.$$

15.3. Радиус круга

$$r = \frac{s^2 + 4h^2}{8h}.$$

15.4. Центральный угол

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4} = \frac{2h}{s} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\frac{n^\circ}{4} = \frac{2h}{s}.$$

---

[1] Термин «сегмент» (от лат. segmentum) означает «отрезок», «полоса».

15.5. Высота хорды

$$h = r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}\,.$$

$$h = 2r\sin^2\frac{\varphi}{4} \quad \text{или} \quad h = 2r\sin^2\frac{n^\circ}{4}\,.$$

$$h = r\Big(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\Big) \quad \text{или} \quad h = r\Big(1 - \cos\frac{n^\circ}{2}\Big).$$

$$h = \frac{1}{2}\,s\,\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4} \quad \text{или} \quad h = \frac{1}{2}\,s\,\operatorname{tg}\frac{n^\circ}{4}\,.$$

15.6. Площадь кругового сегмента

Площадь кругового сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формулам:

$$S = \frac{1}{2}\,r^2\varphi \pm S_{\triangle AOB} \quad \text{или} \quad S = \frac{\pi r^2}{360}\,n \pm S_{\triangle AOB},$$

где знак «$-$» берется, если $\varphi < \pi$ или $n^\circ < 180^\circ$ (рис. 28), а знак «$+$» берется, если $\varphi > \pi$ или $n^\circ > 180^\circ$.

$$S = \frac{lr - s(r-h)}{2}\,.$$

$$S = \frac{1}{2}\,r^2(\varphi - \sin\varphi) \quad \text{или} \quad S = \frac{1}{2}\,r^2\Big(\frac{\pi n}{180} - \sin n^\circ\Big).$$

16. Построение угла по данному значению его тригонометрической функции

16.1. *Построим угол φ, синус которого равен a.*

В координатной плоскости строим (рис. 29) единичную окружность и на оси ординат откладываем точку с координатами $(0, a)$. Через эту точку проводим прямую, параллельную оси абсцисс.

При $|a| > 1$ прямая $y = a$ не пересечет единичную окружность. Значит, при $|a| > 1$ задача не имеет решений.

Если $a = -1$, то прямая $y = -1$ касается единичной окружности в точке $P_{\frac{3\pi}{2}}$ с координатами $(0, -1)$. Строим угол $P_0OP_{\frac{3\pi}{2}}$, где P_0 — точка пересечения единичной окружности с положительным направлением оси Ox.

Тогда при $a = -1$ искомыми будут углы

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

При $|a| < 1$ прямая $y = a$ пересечет единичную окружность в двух точках P_{φ_1} и P_{φ_2}, ординаты которых равны a. Строим два угла $\angle P_0OP_{\varphi_1} = \varphi_1$ и $\angle P_0OP_{\varphi_2} = \varphi_2$. При этом $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = a$.

Следовательно, если $|a| < 1$, то искомыми будут углы

$$\varphi = \varphi_1 + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

и

$$\varphi = \varphi_2 + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

При $a = 1$ прямая $y = 1$ касается единичной окружности в точке $P_{\frac{\pi}{2}}$ с координатами $(0, 1)$. Строим угол $P_0OP_{\frac{\pi}{2}}$.

Следовательно, если $a = 1$, то искомыми будут углы

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

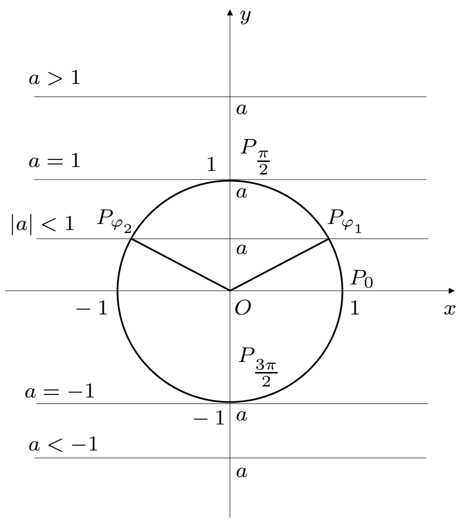


Рис. 29

16.2. *Построим угол φ, косинус которого равен a.*

В координатной плоскости строим (рис. 30) единичную окружность и на оси абсцисс откладываем точку с координатами $(a, 0)$. Через эту точку проводим прямую, параллельную оси ординат.

При $|a| > 1$ прямая $x = a$ не пересечет единичную окружность. Значит, при $|a| > 1$ задача не имеет решений.

Если $a = -1$, то прямая $x = -1$ касается единичной окружности в точке P_π с координатами $(-1, 0)$. Строим угол P_0OP_π, где

P_0 — точка пересечения единичной окружности с положительным направлением оси Ox. Тогда при $a = -1$, искомыми будут углы

$$\varphi = \pi + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

При $|a| < 1$ прямая $y = a$ пересечет единичную окружность в двух точках P_{φ_1} и P_{φ_2}, абсциссы которых равны a. Строим два угла $\angle P_0OP_{\varphi_1} = \varphi_1$ и $\angle P_0OP_{\varphi_2} = \varphi_2$. При этом $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = a$. Следовательно, если $|a| < 1$, то искомыми будут углы

$$\varphi = \varphi_1 + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

и

$$\varphi = \varphi_2 + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

При $a = 1$ прямая $x = 1$ касается единичной окружности в точке P_0 с координатами $(1, 0)$. Следовательно, если $a = 1$, то искомыми будут углы

$$\varphi = 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

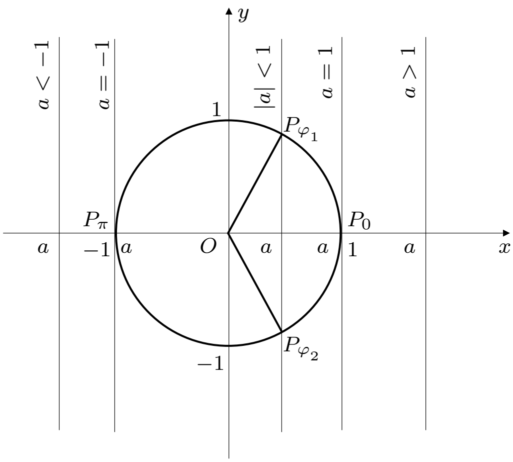


Рис. 30

16.3. *Построим угол φ, тангенс которого равен a.*

В координатной плоскости строим (рис. 31) единичную окружность и на оси тангенсов (на прямой $x = 1$) откладываем точку M с координатами $(1, a)$. Через эту точку и начало координат проводим прямую, которая пересечет единичную окружность в двух точках P_{φ_1} и P_{φ_2}.

Строим $\angle P_0OP_{\varphi_1} = \varphi_1$ и $\angle P_0OP_{\varphi_2} = \varphi_2$, где P_0 — точка пересечения единичной окружности с положительным направлением оси Ox. При этом $\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2 = a$. Значит, искомыми будут углы

$$\varphi = \varphi_1 + \pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

16.4. *Построим угол φ, котангенс которого равен a.*

В координатной плоскости строим (рис. 32) единичную окружность и на оси котангенсов (на прямой $y = 1$) откладываем точку

M с координатами $(a, 1)$. Через эту точку и начало координат проводим прямую, которая пересекает единичную окружность в двух точках P_{φ_1} и P_{φ_2}.

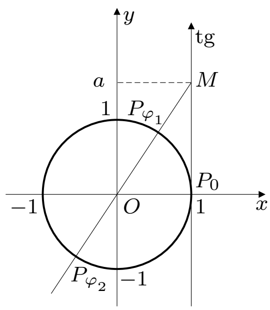


Рис. 31

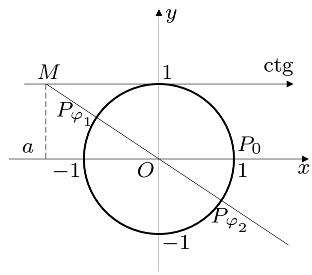


Рис. 32

Строим $\angle P_0OP_{\varphi_1} = \varphi_1$ и $\angle P_0OP_{\varphi_2} = \varphi_2$, где P_0 — точка пересечения единичной окружности с положительным направлением координатной оси Ox. При этом $\operatorname{ctg}\varphi_1 = \operatorname{ctg}\varphi_2 = a$. Значит, искомыми будут углы

$$\varphi = \varphi_1 + \pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

16.5. *Построим угол φ, косеканс которого равен a.*

В координатной плоскости строим (рис. 33) единичную окружность и на оси ординат откладываем точку с координатами $(0, a)$. Через эту точку проводим касательную к единичной окружности.

При $|a| > 1$ можно построить две касательные, которые касаются окружности в двух точках P_{φ_1} и P_{φ_2}. Строим $\angle P_0OP_{\varphi_1} = \varphi_1$ и $\angle P_0OP_{\varphi_2} = \varphi_2$, косекансы

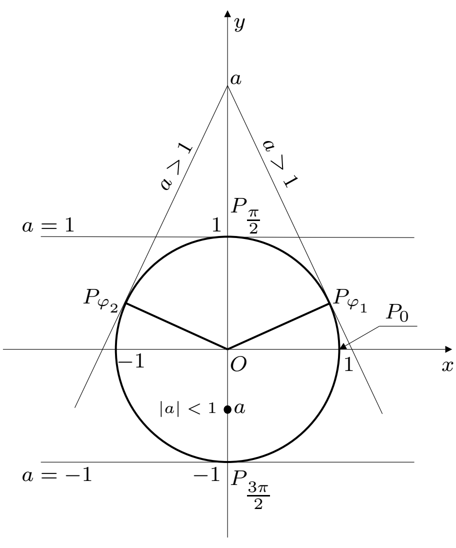


Рис. 33

которых $\operatorname{cosec}\varphi_1 = \operatorname{cosec}\varphi_2 = a$. Здесь P_0 — точка пересечения единичной окружности с положительным направлением оси Ox.

Следовательно, если $|a| > 1$, то искомыми будут углы

$$\varphi = \varphi_1 + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

и

$$\varphi = \varphi_2 + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Если $a = -1$, то касательной является прямая $y = -1$, которая касается единичной окружности в точке $P_{\frac{3\pi}{2}}$. Строим угол $P_0OP_{\frac{3\pi}{2}}$.

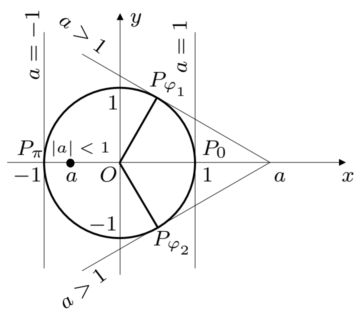


Рис. 34

Тогда при $a = -1$ искомыми будут углы

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

При $|a| < 1$ построить касательную к единичной окружности невозможно.

Следовательно, если $|a| < 1$, то задача решений не имеет.

Если $a = 1$, то касательной является прямая $y = 1$, которая касается единичной окружности в точке $P_{\frac{\pi}{2}}$. Строим угол $P_0OP_{\frac{\pi}{2}}$.

Тогда при $a = 1$ искомыми будут углы

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

16.6. *Постройте угол φ, секанс которого равен a.*

В координатной плоскости строим (рис. 34) единичную окружность и на оси абсцисс откладываем точку с координатами $(a, 0)$. Через эту точку проводим касательную к единичной окружности.

При $|a| > 1$ можно построить две касательные, которые касаются окружности в двух точках P_{φ_1} и P_{φ_2}. Строим $\angle P_0OP_{\varphi_1} = \varphi_1$ и $\angle P_0OP_{\varphi_2} = \varphi_2$, где P_0 — точка пересечения единичной окружности с положительным направлением оси Ox. Причем $\sec\varphi_1 = \sec\varphi_2 = a$.

Следовательно, если $|a| > 1$, то искомыми будут углы

$$\varphi = \varphi_1 + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

и

$$\varphi = \varphi_2 + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Если $a = -1$, то касательной является прямая $x = -1$, которая касается единичной окружности в точке P_π. Строим угол P_0OP_π.

Тогда при $a = -1$ искомыми будут углы

$$\varphi = \pi + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

При $|a| < 1$ построить касательную к единичной окружности невозможно.

Следовательно, если $|a| < 1$, то задача решений не имеет.

Если $a = 1$, то касательной является прямая $x = 1$, которая касается единичной окружности в точке P_0 с координатами $(1, 0)$.

Тогда при $a = 1$ искомыми будут углы

$$\varphi = 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

17. Связь между тригонометрическими функциями одного аргумента

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \forall x \in \Big(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\Big), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \forall x \in (\pi n; \pi(n+1)), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \forall x \in \Big(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\Big), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{cosec} x = \csc x = \frac{1}{\sin x} \quad \forall x \in (\pi n; \pi(n+1)), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad \forall x \in \Big(\frac{\pi}{2}\, n; \frac{\pi}{2}(n+1)\Big), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \quad \forall x \in \Big(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\Big), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x \quad \forall x \in (\pi n; \pi(n+1)), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

18. Значения тригонометрических функций для значений аргумента $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

Приближенные значения:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4142; \qquad \sqrt{3} \approx 1{,}7322;$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660; \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774; \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}1547.$$

Таблица 4

Значения x		$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\sec x$	$\operatorname{cosec} x$
В градусном измерении	В радианах						
$0°$	0	0	1	0	не существует	1	не существует
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	не существует	0	не существует	1

19. Формулы приведения

Таблица 5

Функции	Аргумент						
	$-x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{3\pi}{2}-x$	$\frac{3\pi}{2}+x$
sin	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$
cos	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
tg	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} x$
ctg	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$
sec	$\sec x$	$\csc x$	$-\csc x$	$-\sec x$	$-\sec x$	$-\csc x$	$\csc x$
csc	$-\csc x$	$\sec x$	$\sec x$	$\csc x$	$-\csc x$	$-\sec x$	$-\sec x$

Здесь вместо обозначения «cosec» косеканса использовано редко встречающееся обозначение «csc».

$$\sin(x+\pi n) = (-1)^n \cdot \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos(x+\pi n) = (-1)^n \cdot \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg}(x+\pi n) = \operatorname{tg} x \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

при любом действительном $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

$$\operatorname{ctg}(x+\pi n) = \operatorname{ctg} x \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

при любом действительном $x \neq \pi k \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

20. Формулы сложения

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$$

$$\forall(x,y)\in\Big\{(x,y)\colon x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,\ x+y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n\Big\},$$

$$\forall k,m,n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$$

$$\forall(x,y)\in\Big\{(x,y)\colon x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,\ x-y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n\Big\},$$

$$\forall k,m,n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y-1}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y}$$

$$\forall(x,y)\in\{(x,y)\colon x\neq\pi k,\ y\neq\pi m,\ x+y\neq\pi n\},$$

$$\forall k,m,n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg}(x-y)=-\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y+1}{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y}$$

$$\forall(x,y)\in\{(x,y)\colon x\neq\pi k,\ y\neq\pi m,\ x-y\neq\pi n\},$$

$$\forall k,m,n\in\mathbb{Z}.$$

$$\sin(x+y+z)=$$

$$=\sin x\cos y\cos z+\cos x\sin y\cos z+\cos x\cos y\sin z-\sin x\sin y\sin z$$

$$\forall x,y,z\in\mathbb{R}.$$

$$\cos(x+y+z)=$$

$$=\cos x\cos y\cos z-\cos x\sin y\sin z-\sin x\cos y\sin z-\sin x\sin y\cos z$$

$$\forall x,y,z\in\mathbb{R}.$$

$$\operatorname{tg}(x+y+z)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x}$$

$$\forall(x,y,z)\in\Big\{(x,y,z)\colon x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi l,\ z\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,$$

$$x+y+z\neq\frac{\pi}{2}+\pi n\Big\},\quad\forall k,l,m,n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg}(x+y+z)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y\operatorname{ctg}z-\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y-\operatorname{ctg}z}{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y+\operatorname{ctg}y\operatorname{ctg}z+\operatorname{ctg}z\operatorname{ctg}x-1}$$

$$\forall(x,y,z)\in\{(x,y,z)\colon x\neq\pi k,\ y\neq\pi l,\ z\neq\pi m,\ x+y+z\neq\pi n\},$$

$$\forall k,l,m,n\in\mathbb{Z}.$$

21. Тригонометрические функции двойного аргумента

$$\sin 2x=2\sin x\cos x\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\quad\forall x\in\Big\{x\colon x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\,n,\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n\Big\},\quad\forall n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2}{\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x}\quad\forall x\in\Big\{x\colon x\neq\frac{\pi}{4}\ n\Big\},\quad\forall n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg}2x=\frac{\operatorname{ctg}^2 x-1}{2\operatorname{ctg}x},\quad\operatorname{ctg}2x=\frac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x}{2}$$

$$\forall x\in\Big(\frac{\pi}{2}\,n;\frac{\pi}{2}\,(n+1)\Big),\quad\forall n\in\mathbb{Z}.$$

22. Тригонометрические функции тройного аргумента

$$\sin 3x=\sin x(3\cos^2 x-\sin^2 x)\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

$$\sin 3x=\sin x(4\cos^2 x-1)\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

$$\sin 3x = \sin x(3 - 4\sin^2 x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos 3x = \cos x(\cos^2 x - 3\sin^2 x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos 3x = \cos x(4\cos^2 x - 3) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos 3x = \cos x(1 - 4\sin^2 x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{\operatorname{tg} x(3 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x} \quad \forall x \in \left\{x\colon x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n\right\},\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg} x(\operatorname{ctg}^2 x - 3)}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1} \quad \forall x \in \left\{x\colon x \neq \frac{\pi}{3}n\right\},\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

23. Тригонометрические функции половинного аргумента

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\forall x \in (-\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad \forall x \in (\pi n; \pi(n+1)),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}} \quad \forall x \in (-\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}} \quad \forall x \in (-\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n), \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}} \ \ \forall x \in \left\{ x \colon x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ x \neq \pi + 2\pi n \right\}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}} \quad \forall x \in (\pi n; \pi(n+1)), \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

24. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), \ \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi m; \frac{\pi}{2} + \pi m \right), \ \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), \ \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi m; \frac{\pi}{2} + \pi m \right), \ \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$$

$$\forall x \in (\pi n; \pi(n+1)),\ \forall y \in (\pi m; \pi(m+1)),\ \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = -\frac{\sin(x-y)}{\sin x \sin y}$$

$$\forall x \in (\pi n; \pi(n+1)),\ \forall y \in (\pi m; \pi(m+1)),\ \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x + \cos y = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-y}{2}\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x + \cos y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y-x}{2}\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x - \cos y = -2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2}\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x - \cos y = -2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-y}{2}\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\cos(x-y)}{\cos x \sin y}$$

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ \forall y \in (\pi m; \pi(m+1)),\ \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} y = -\frac{\cos(x+y)}{\cos x \sin y}$$

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ \forall y \in (\pi m; \pi(m+1)),\ \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x - \cos x = -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x - \cos x = -\sqrt{2}\cos\Big(\frac{\pi}{4} + x\Big) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x} \quad \forall x \in \Big(\frac{\pi}{2}\,n; \frac{\pi}{2}(n+1)\Big), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2\operatorname{ctg} 2x \quad \forall x \in \Big(\frac{\pi}{2}\,n; \frac{\pi}{2}(n+1)\Big), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

25. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x \sin y \sin z =$$
$$= \frac{1}{4}\big(-\sin(x+y+z) + \sin(-x+y+z) + \sin(x-y+z) + \sin(x+y-z)\big)$$
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x \sin y \cos z =$$
$$= \frac{1}{4}\big(-\cos(x+y+z) + \cos(-x+y+z) + \cos(x-y+z) - \cos(x+y-z)\big)$$
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x \cos y \cos z =$$
$$= \frac{1}{4}\big(\sin(x+y+z) - \sin(-x+y+z) + \sin(x-y+z) + \sin(x+y-z)\big)$$
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

$$\cos x \cos y \cos z =$$
$$= \frac{1}{4}\big(\cos(x+y+z) + \cos(-x+y+z) + \cos(x-y+z) + \cos(x+y-z)\big)$$
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

26. Формулы понижения степени тригонометрических функций

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\,(1 - \cos 2x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\,(1 + \cos 2x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}\,(3\sin x - \sin 3x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\,(3\cos x + \cos 3x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

27. Выражение тригонометрических функций через одну из них того же аргумента

Выбор знака перед корнем зависит от того, в какой четверти находится угол x.

27.1. Через $\sin x$:

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}\,;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}} \quad \Big(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \;\; \forall n \in \mathbb{Z}\Big);$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x} \quad (x \neq \pi n \;\; \forall n \in \mathbb{Z}).$$

27.2. Через $\cos x$:

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}\,;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} \quad \Big(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \;\; \forall n \in \mathbb{Z}\Big);$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}} \quad (x \neq \pi n \;\; \forall n \in \mathbb{Z}).$$

27.3. Через $\operatorname{tg} x$:

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \qquad \Bigl(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}\Bigr);$$

$$\cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \qquad \Bigl(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}\Bigr);$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad \forall x \in \Bigl(\frac{\pi}{2} n; \frac{\pi}{2}(n+1)\Bigr), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

27.4. Через $\operatorname{ctg} x$:

$$\sin x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}} \qquad (x \neq \pi n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}).$$

$$\cos x = \frac{\operatorname{ctg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}} \qquad (x \neq \pi n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}).$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \quad \forall x \in \Bigl(\frac{\pi}{2} n; \frac{\pi}{2}(n+1)\Bigr), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

28. Конечные суммы тригонометрических функций

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(x+ks) = \frac{\sin\Bigl(x+\dfrac{ns}{2}\Bigr)\sin\dfrac{(n+1)s}{2}}{\sin\dfrac{s}{2}}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(x+ks) = \frac{\cos\Bigl(x+\dfrac{ns}{2}\Bigr)\sin\dfrac{(n+1)s}{2}}{\sin\dfrac{s}{2}}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\dfrac{nx}{2}\,\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}} \qquad (x \neq 2\pi m \ \ \forall m \in \mathbb{Z}).$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin \dfrac{nx}{2} \cos \dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}} \qquad (x \neq 2\pi m \ \ \forall m \in \mathbb{Z}).$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sin(x + ks) = \frac{\sin\Big(x + \dfrac{n(s+\pi)}{2}\Big) \sin \dfrac{(n+1)(s+\pi)}{2}}{\cos \dfrac{s}{2}}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos(x + ks) = \frac{\cos\Big(x + \dfrac{n(s+\pi)}{2}\Big) \sin \dfrac{(n+1)(s+\pi)}{2}}{\cos \dfrac{s}{2}}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \sin(x + ks) = \frac{(n+1)\sin(x+ns) - n\sin(x+ns+n) - \sin x}{\sin^2 \dfrac{s}{2}}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cos(x + ks) = \frac{(n+1)\cos(x+ns) - n\cos(x+ns+n) - \cos x}{\sin^2 \dfrac{s}{2}}.$$

29. Формулы Моавра и Эйлера

29.1. Формула Моавра

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$$

Формула была получена в 1707 г. английским математиком Абрахамом Моавром (Муавром).

29.2. Формулы Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

$$e^{i\pi} = -1.$$

Первую из своих формул Леонард Эйлер получил в 1748 г.

30. Свойства и графики тригонометрических функций

30.1. Функция $y(x) = \sin x$

1°. *Область определения* $\mathrm{D}(\sin x) = \mathbb{R}$.

2°. *Непрерывная* на $\mathbb{R}$.

3°. *Нечетная*: $\sin(-x) = -\sin x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

График симметричен относительно начала координат.

4°. *Периодическая* с основным периодом $T_0 = 2\pi$ (2π-периодическая). Периоды $T = 2\pi n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

5°. *График пересекает ось ординат* в начале системы координат: $\sin 0 = 0$.

6°. *Нули*: $x = \pi n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

График пересекает ось абсцисс в точках $(\pi n, 0) \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

7°. *Промежутки знакоопределенности.* На интервалах

$$(2\pi n; \pi + 2\pi n) \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

положительная; график расположен выше оси абсцисс. На интервалах

$$(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n) \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

отрицательная; график расположен ниже оси абсцисс.

8°. *Дифференцируемость.* Производная

$$y'(x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Дифференцируемая на $\mathbb{R}$. Производная непрерывна на $\mathbb{R}$.

Значения производной функции в нулях функции синус:

$$y'(2\pi n) = \cos 2\pi n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

$$y'(\pi + 2\pi n) = \cos(\pi + 2\pi n) = -1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

В точках $(2\pi n, 0) \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$ график пересекает ось абсцисс под углом в $45°$; в точках $(\pi + 2\pi n, 0) \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$ — под углом в $135°$.

Вторая производная

$$y''(x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Дважды дифференцируемая на $\mathbb{R}$. Вторая производная функция непрерывна на $\mathbb{R}$.

9°. *Критические точки*: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

10°. *Промежутки монотонности.* Возрастает на отрезках

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right] \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

убывает на отрезках

$$\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right] \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

11°. *Точки экстремума и экстремумы.* Точки минимума

$$x = -\frac{\pi}{2}+2\pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

точки максимума

$$x = \frac{\pi}{2}+2\pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Минимумы: $y_{\min} = -1$; максимумы: $y_{\max} = 1$.

В точках $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n, 1\right)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ график касается горизонтальной прямой $y = 1$; в точках $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n, -1\right)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ — горизонтальной прямой $y = -1$.

12°. *Обратимость.* Обратимая на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right]$, где n — любое целое число.

13°. *Выпуклость и вогнутость.* Выпуклая на отрезках

$$[\pi+2\pi n; 2\pi+2\pi n] \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

вогнутая на отрезках

$$[2\pi n; \pi+2\pi n] \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

14°. *Точки перегиба*: $(\pi n, 0)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

При переходе через нули изменяется характер выпуклости.

15°. *Асимптот* нет.

16°. *Ограниченная* функция:

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

График расположен в горизонтальной полосе, ограниченной прямыми $y = -1$ и $y = 1$.

17°. *Наибольшее и наименьшее значения.* Наибольшее значение $\max\limits_{\mathbb{R}}(\sin x) = 1$ достигается в точках $x = \frac{\pi}{2}+2\pi n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$; наименьшее значение $\min\limits_{\mathbb{R}}(\sin x) = -1$ достигается в точках $x = -\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где число n — любое целое.

18°. *Множество значений* $\mathrm{E}(\sin x) = [-1; 1]$.

19°. *График* построен на рис. 35.

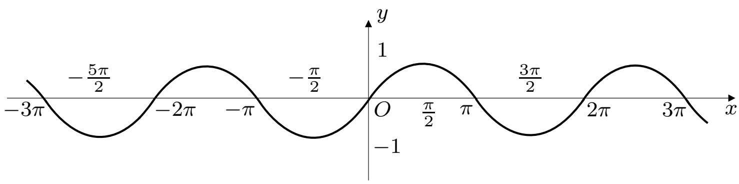


Рис. 35

График функции синус называется ***синусоидой***[1].

График $\Gamma \sin x$ можно построить параллельным переносом построенного на рис. 36 $\Gamma \cos x$ вдоль оси абсцисс на $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ единиц длины вправо, а также на $\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k$ единиц длины влево, где k — любое целое неотрицательное число.

30.2. Функция $y(x) = \cos x$

1°. *Область определения* $\mathrm{D}(\cos x) = \mathbb{R}$.

2°. *Непрерывная* на $\mathbb{R}$.

3°. *Четная*: $\cos(-x) = \cos x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

График симметричен относительно оси ординат.

4°. *Периодическая* с основным периодом $T_0 = 2\pi$ (2π-периодическая). Периоды $T = 2\pi n \ \ \forall n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

5°. *График пересекает ось ординат* в точке $(0, 1)$: $\cos 0 = 1$.

6°. *Нули*: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

График пересекает ось абсцисс в точках $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n, 0\right) \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

7°. *Промежутки знакоопределенности.* На интервалах

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

положительная; график расположен выше оси абсцисс. На интервалах

[1] Термин «синусоида» (от лат. sinus) означает «тетива (лука)», «изгиб», «выпуклость», «вздутие», в сочетании с греческим словом $\varepsilon\iota\delta o\varsigma$ означает «вид». Другими словами, «синусоида» в переводе означает «тетивовидная».

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

отрицательная; график расположен ниже оси абсцисс.

8°. *Дифференцируемость.* Производная

$$y'(x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Дифференцируемая на $\mathbb{R}$. Производная непрерывна на $\mathbb{R}$.
Значения производной функции в нулях функции косинус:

$$y'\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

В точках $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n, 0\right)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ график пересекает ось абсцисс под углом в $45°$; в точках $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n, 0\right)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ — под углом в $135°$.

Вторая производная

$$y''(x) = -\cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Дважды дифференцируемая на $\mathbb{R}$. Вторая производная функция непрерывна на $\mathbb{R}$.

9°. *Критические точки*: $x = \pi n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

10°. *Промежутки монотонности.* Возрастает на отрезках

$$[-\pi + 2\pi n; 2\pi n] \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

убывает на отрезках

$$[2\pi n; \pi + 2\pi n] \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

11°. *Точки экстремума и экстремумы.* Точки минимума

$$x = \pi + 2\pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

точки максимума

$$x = 2\pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Минимумы: $y_{\min} = -1$; максимумы: $y_{\max} = 1$.

В точках $(2\pi n, 1)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ график касается горизонтальной прямой $y = 1$; в точках $(\pi + 2\pi n, -1)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ — прямой $y = -1$.

12°. *Обратимость.* Обратимая на отрезках $[\pi n; \pi(n+1)]$, где число n — любое целое.

13°. *Выпуклость и вогнутость.* Выпуклая на отрезках

$$\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right] \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

вогнутая на отрезках

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right] \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

14°. *Точки перегиба*: $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n, 0\right)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

При переходе через нули изменяется характер выпуклости.

15°. *Асимптот* нет.

16°. *Ограниченная* функция:

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

График расположен в горизонтальной полосе, ограниченной прямыми $y = -1$ и $y = 1$.

17°. *Наибольшее и наименьшее значения.* Наибольшее значение $\max\limits_{\mathbb{R}}(\cos x) = 1$ достигается в точках $x = 2\pi n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$; наименьшее значение $\min\limits_{\mathbb{R}}(\cos x) = -1$ достигается в точках $x = \pi + 2\pi n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

18°. *Множество значений* $\mathrm{E}(\cos x) = [-1; 1]$.

19°. *График* построен на рис. 36.

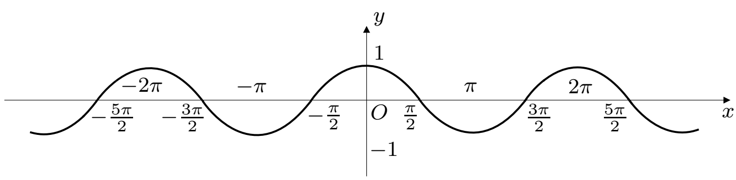


Рис. 36

График функции косинус называется ***косинусоидой***.

График $\Gamma \cos x$ можно построить параллельным переносом построенного на рис. 35 $\Gamma \sin x$ вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{2}+2\pi k$ единиц длины влево, а также на $\frac{3\pi}{2}+2\pi k$ единиц длины вправо, где k — любое целое неотрицательное число.

30.3. Функция $y(x) = \operatorname{tg} x$

1°. *Область определения.* Определена на интервалах

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

2°. *Непрерывность.* Непрерывна на интервалах

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Точки разрыва: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

3°. *Нечетная*: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \ \ \forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n; \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right), \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

График симметричен относительно начала координат.

4°. *Периодическая* с основным периодом $T_0 = \pi$ (π-периодическая). Периоды $T = \pi n \ \ \forall n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

5°. *График пересекает ось ординат* в начале системы координат: $\operatorname{tg} 0 = 0$.

6°. *Нули*: $x = \pi n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

График пересекает ось абсцисс в точках $(\pi n, 0) \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

7°. *Промежутки знакоопределенности.* На интервалах

$$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

положительная; график расположен выше оси абсцисс. На интервалах

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

отрицательная; график расположен ниже оси абсцисс.

8°. *Дифференцируемость.* Производная

$$y'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \ \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

На интервалах $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n; \ \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right) \ \forall n \in \mathbb{Z}$ дифференцируема, а первая производная функция непрерывна.

Значения производной функции в нулях функции тангенс:

$$y'(\pi n) = \frac{1}{\cos^2 \pi n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

В точках $(\pi n, 0)$, где n — любое целое число, график пересекает ось абсцисс под углом в 45°.

Вторая производная

$$y''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \quad \forall x \in \Big(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\Big), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

На интервалах $\Big(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\Big)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ дважды дифференцируемая, а вторая производная функция непрерывна.

9°. *Критических точек* нет.

10°. *Промежутки монотонности.* Возрастает на интервалах

$$\Big(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\Big) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

11°. *Точек экстремума и экстремумов* нет.

12°. *Обратимость.* Обратимая на интервалах $\Big(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\Big)$, где n — любое целое число.

13°. *Выпуклость и вогнутость.* Выпуклая на полуинтервалах

$$\Big[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\Big) \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

вогнутая на полуинтервалах

$$\Big(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\Big] \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

14°. *Точки перегиба* $(\pi n, 0)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

При переходе через нули изменяется характер выпуклости.

15°. *Асимптоты.* Вертикальные асимптоты: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Левосторонние пределы:

$$\operatorname{tg} x \to +\infty \ \text{ при } \ x \to \Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big) - 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Правосторонние пределы:

$$\operatorname{tg} x \to -\infty \ \text{ при } \ x \to \Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big) + 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

16°. *Ограниченность.* Неограниченная ни снизу, ни сверху.

17°. *Наибольших и наименьших значений* нет.

18°. *Множество значений* $\mathrm{E}(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R}$.

19°. *График* построен на рис. 37.

График функции тангенс называется ***тангенсоидой***.

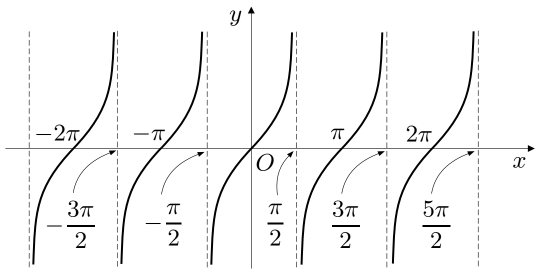


Рис. 37

30.4. Функция $y(x) = \operatorname{ctg} x$

1°. *Область определения.* Определена на интервалах

$$(\pi n; \pi(n+1)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

2°. *Непрерывность.* Непрерывна на интервалах

$$(\pi n; \pi(n+1)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Точки разрыва $x = \pi n \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

3°. *Нечетная*: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x \ \forall x \in (\pi n; \pi(n+1)), \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

График симметричен относительно начала координат.

4°. *Периодическая* с основным периодом $T_0 = \pi$ (π-периодическая). Периоды $T = \pi n \ \forall n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

5°. *График не пересекает оси ординат.*

6°. *Нули*: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

График пересекает ось абсцисс в точках $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n, 0\right) \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

7°. *Промежутки знакоопределенности.* На интервалах

$$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

положительная; график расположен выше оси абсцисс. На интервалах

$$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi(n+1)\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

отрицательная; график расположен ниже оси абсцисс.

8°. *Дифференцируемость*. Производная

$$y'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \forall x \in (\pi n; \pi(n+1)), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

На интервалах $(\pi n; \pi(n+1))$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ дифференцируема, а производная непрерывна.

Значения производной функции в нулях функции котангенс:

$$y'\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = -\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)} = -1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

В точках $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n, 0\right)$, где n — любое целое число, график пересекает ось абсцисс под углом в $135°$.

Вторая производная

$$y''(x) = \frac{2\cos x}{\sin^3 x} \quad \forall x \in (\pi n; \pi(n+1)), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

На интервалах $(\pi n; \pi(n+1))$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ дважды дифференцируемая, а вторая производная функция непрерывна.

9°. *Критических точек* нет.

10°. *Промежутки монотонности*. Убывает на интервалах

$$(\pi n; \pi(n+1)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

11°. *Точек экстремума и экстремумов* нет.

12°. *Обратимость*. Обратимая на интервалах $(\pi n; \pi(n+1))$, где число n — любое целое.

13°. *Выпуклость и вогнутость*. Выпуклая на полуинтервалах

$$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right] \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

вогнутая на полуинтервалах

$$\left[\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi(n+1)\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

14°. *Точки перегиба*: $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n, 0\right)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

При переходе через нули изменяется характер выпуклости.

15°. *Асимптоты.* Вертикальные асимптоты: $x = \pi n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Левосторонние пределы:

$$\operatorname{ctg} x \to -\infty \quad \text{при} \quad x \to \pi n - 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Правосторонние пределы:

$$\operatorname{ctg} x \to +\infty \quad \text{при} \quad x \to \pi n + 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

16°. *Ограниченность.* Неограниченная ни снизу, ни сверху.

17°. *Наибольших и наименьших значений* нет.

18°. *Множество значений* $\mathrm{E}(\operatorname{ctg} x) = \mathbb{R}$.

19°. *График* построен на рис. 38.

График функции котангенс называется ***котангенсоидой***.

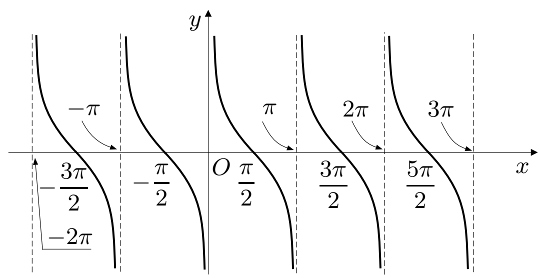


Рис. 38

30.5. Функция $y(x) = \sec x$

1°. *Область определения.* Определена на интервалах

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

2°. *Непрерывность.* Непрерывна на интервалах

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Точки разрыва: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

3°. *Четная*: $\sec(-x) = \sec x \ \ \forall x \in \Big(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\Big), \forall n \in \mathbb{Z}$.

График симметричен относительно оси ординат.

4°. *Периодическая* с основным периодом $T_0 = 2\pi$ (2π-периодическая). Периоды $T = 2\pi n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

5°. *График пересекает ось ординат* в точке $(0, 1)$: $\sec 0 = 1$.

6°. *Нулей* нет. График не пересекает оси абсцисс.

7°. *Промежутки знакоопределенности.* На интервалах

$$\Big(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\Big) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

положительная; график расположен выше оси абсцисс. На интервалах

$$\Big(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\Big) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

отрицательная; график расположен ниже оси абсцисс.

8°. *Дифференцируемость.* Производная

$$y'(x) = \operatorname{tg} x \, \sec x \quad \forall x \in \Big(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \ \frac{\pi}{2} + \pi n\Big), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

На интервалах $\Big(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \ \dfrac{\pi}{2} + \pi n\Big) \ \forall n \in \mathbb{Z}$ дифференцируема, а первая производная функция непрерывна.

Вторая производная

$$y''(x) = \sec^3 x(1 + \sin^2 x) \quad \forall x \in \Big(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \ \frac{\pi}{2} + \pi n\Big), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

На интервалах $\Big(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \ \dfrac{\pi}{2} + \pi n\Big) \ \forall n \in \mathbb{Z}$ дважды дифференцируемая, а вторая производная функция непрерывна.

9°. *Критические точки*: $x = \pi n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

10°. *Промежутки монотонности.* Возрастает на полуинтервалах

$$\Big[2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\Big) \ \text{ и } \ \Big(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\Big] \ \ \forall n \in \mathbb{Z};$$

убывает на полуинтервалах

$$\Big[\pi + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\Big) \ \text{ и } \ \Big(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\Big] \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

11°. *Точки экстремума и экстремумы.* Точки минимума

$$x = 2\pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

точки максимума

$$x = \pi + 2\pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Минимумы $y_{\min} = 1$; максимумы $y_{\max} = -1$.

В точках $(2\pi n, 1)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ график касается горизонтальной прямой $y = 1$; в точках $(\pi + 2\pi n, -1)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ — прямой $y = -1$.

На интервалах $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ график расположен не ниже прямой $y = 1$; на интервалах $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ график расположен не выше прямой $y = -1$.

12°. *Выпуклость и вогнутость.* Выпуклая на интервалах

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

вогнутая на интервалах

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

13°. *Точек перегиба* нет.

14°. *Асимптоты.* Вертикальные асимптоты $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Левосторонние пределы:

$$\sec x \to -\infty \ \text{ при } \ x \to \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z};$$

$$\sec x \to +\infty \ \text{ при } \ x \to \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Правосторонние пределы:

$$\sec x \to +\infty \ \text{ при } \ x \to \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) + 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z};$$

$$\sec x \to -\infty \ \text{ при } \ x \to \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) + 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

15°. *Ограниченность.* Неограниченная ни снизу, ни сверху.

16°. *Наибольших и наименьших значений* нет.

17°. *Множество значений* $\mathrm{E}(\sec x) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

18°. *График* построен на рис. 39.

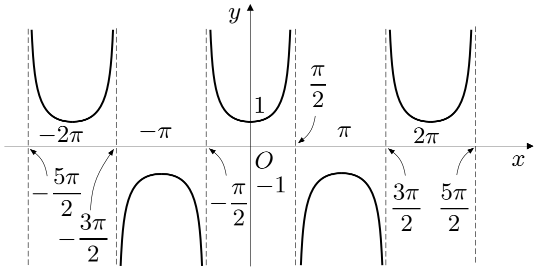


Рис. 39

График $\Gamma \sec x$ можно построить параллельным переносом построенного на рис. 40 $\Gamma \operatorname{cosec} x$ вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{2}+2\pi k$ единиц длины влево, а также на $\frac{3\pi}{2}+2\pi k$ единиц длины вправо, где k — любое целое неотрицательное число.

30.6. Функция $y(x) = \operatorname{cosec} x$

1°. *Область определения.* Определена на интервалах

$$(\pi n; \pi(n+1)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

2°. *Непрерывность.* Непрерывна на интервалах

$$(\pi n; \pi(n+1)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Точки разрыва $x = \pi n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

3°. *Нечетная*:

$$\operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x \quad \forall x \in (\pi n; \pi(n+1)), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

График симметричен относительно начала координат.

4°. *Периодическая* с основным периодом $T_0 = 2\pi$ (2π-периодическая). Периоды $T = 2\pi n$ $\forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

5°. *График не пересекает оси ординат.*

6°. *Нулей* нет. График не пересекает оси абсцисс.

7°. *Промежутки знакоопределенности.* На интервалах

$$(2\pi n; \pi + 2\pi n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

положительная; график расположен выше оси абсцисс. На интервалах

$$(\pi + 2\pi n; 2\pi(n+1)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

отрицательная; график расположен ниже оси абсцисс.

8°. *Дифференцируемость.* Производная

$$y'(x) = -\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x \quad \forall x \in (\pi n; \pi(n+1)), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

На интервалах $(\pi n; \pi(n+1))$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ дифференцируема, а первая производная функция непрерывна.

Вторая производная

$$y''(x) = \operatorname{cosec}^3 x(1 + \cos^2 x) \quad \forall x \in (\pi n; \pi(n+1)), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

На интервалах $(\pi n; \pi(n+1))$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ дважды дифференцируемая, а вторая производная функция непрерывна.

9°. *Критические точки*: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

10°. *Промежутки монотонности.* Убывает на полуинтервалах

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right) \text{ и } \left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

возрастает на полуинтервалах

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right) \text{ и } \left(\pi + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right] \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

11°. *Точки экстремума и экстремумы.* Точки минимума

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

точки максимума

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Минимумы $y_{\min} = 1$; максимумы $y_{\max} = -1$.

В точках $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, 1\right)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ график касается горизонтальной прямой $y = 1$; в точках $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, -1\right)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ — горизонтальной прямой $y = -1$.

На интервалах $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ график расположен не ниже прямой $y = 1$; на интервалах $(\pi + 2\pi n; 2\pi(n+1))$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ график расположен не выше прямой $y = -1$.

12°. *Выпуклость и вогнутость.* Выпуклая на интервалах

$$(2\pi n; \pi + 2\pi n) \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

вогнутая на интервалах

$$(\pi + 2\pi n; 2\pi(n+1)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

13°. *Точек перегиба* нет.

14°. *Асимптоты.* Вертикальные асимптоты $x = \pi n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$. Левосторонние пределы:

$$\operatorname{cosec} x \to -\infty \ \text{ при } \ x \to 2\pi n - 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{cosec} x \to +\infty \ \text{ при } \ x \to (\pi + 2\pi n) - 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Правосторонние пределы:

$$\operatorname{cosec} x \to +\infty \ \text{ при } \ x \to 2\pi n + 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{cosec} x \to -\infty \ \text{ при } \ x \to (\pi + 2\pi n) + 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

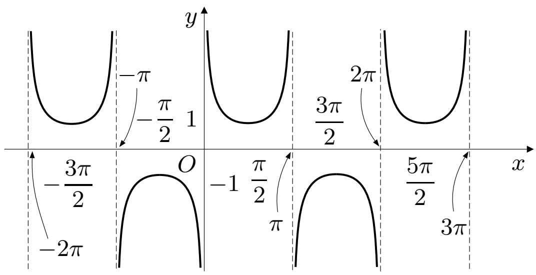


Рис. 40

15°. *Ограниченность.* Неограниченная ни снизу, ни сверху.

16°. *Наибольших и наименьших значений* нет.

17°. *Множество значений* $\mathrm{E}(\operatorname{cosec} x) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

18°. *График* построен на рис. 40.

График $\Gamma \operatorname{cosec} x$ можно построить параллельным переносом построенного на рис. 39 $\Gamma \sec x$ вдоль оси абсцисс на $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ единиц длины вправо, а также на $\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k$ единиц длины влево, где k — любое целое неотрицательное число.

31. Гармоника

Функция вида

$$y(x) = A\sin(\omega x + \varphi) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

где A, ω, φ — такие постоянные, что $A > 0$, $\omega > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, называется ***гармоникой*** (рис. 41).

Постоянные, входящие в формулу, имеют названия: A — ***амплитуда***; ω — ***круговая частота***; φ — ***начальная фаза***.

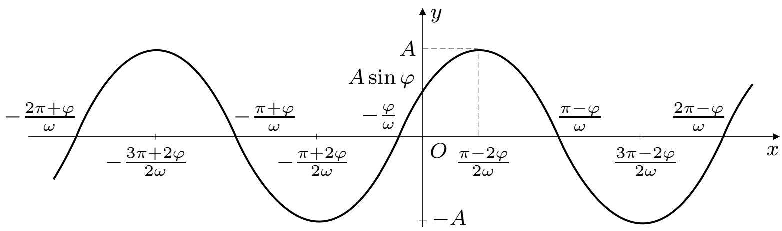


Рис. 41

Гармоника является периодической функцией с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Число $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ называется ***частотой***.

Функция

$$f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (|a| + |b| \neq 0)$$

приводится к виду

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\ \sin(\omega x + \varphi) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

с помощью введения вспомогательного угла φ по формулам:

$$\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Гармоника является решением дифференциального уравнения гармонического колебания

$$y'' = -\omega^2 y.$$

32. Затухающие гармонические колебания

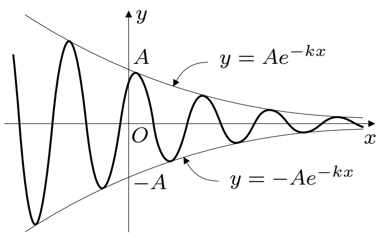


Рис. 42

Функция (рис. 42)

$$y(x) = Ae^{-kx}\sin(\omega x+\varphi)\ \forall x\in\mathbb{R},$$

где параметры $A > 0, \omega > 0$, $k > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, описывает ***затухающие гармонические колебания*** точки.

33. Фигуры Лиссажу

Кривые с параметрическим заданием

$$x = A\sin(\omega_1 t + \varphi), \quad y = B\sin(\omega_2 t + \psi),$$

где A, B, ω_1, ω_2 — положительные числа, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}m$, $m \in \mathbb{Z}$, $\psi = \dfrac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$, называются ***фигурами Лиссажу*** (рис. 43 – 50).

Фигуры Лиссажу получаются при сложении двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.

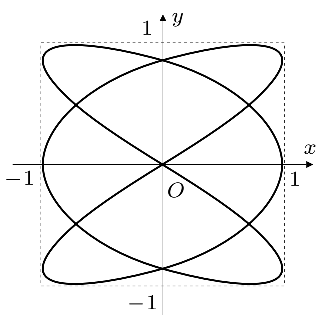


Рис. 43. $x=\cos 3t$, $y=\sin 2t$

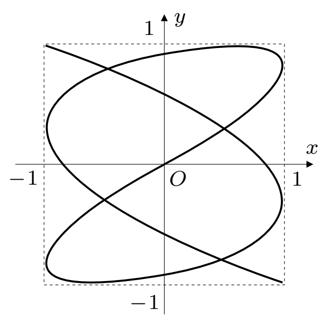


Рис. 44. $x=\sin 5t$, $y=\sin 3t$

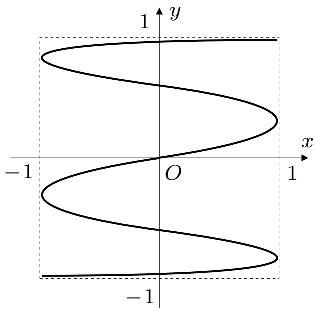


Рис. 45. $x = \cos 5t,\ y = \cos t$

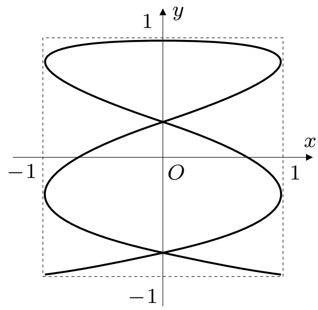


Рис. 46. $x = \sin 5t,\ y = \cos 2t$

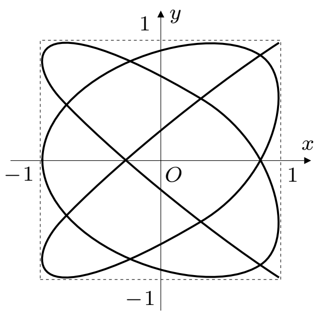


Рис. 47. $x = \cos 6t,\ y = \cos 5t$

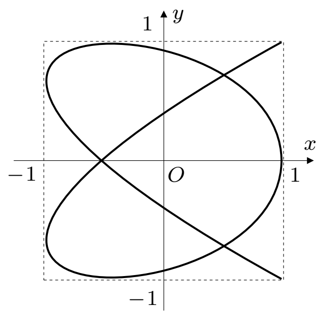


Рис. 48. $x = \cos 4t,\ y = \sin 3t$

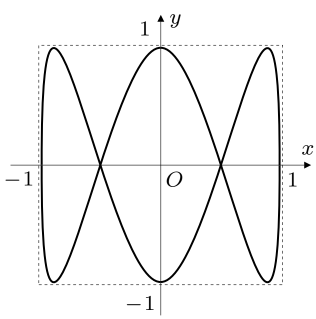


Рис. 49. $x = \cos t,\ y = \sin 3t$

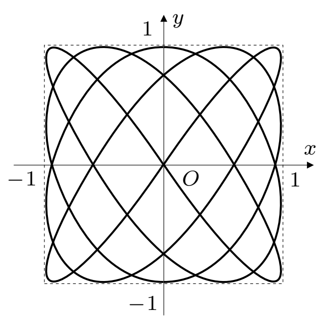


Рис. 50. $x = \sin 4t,\ y = \sin 5t$

34. Дифференцирование и интегрирование тригонометрических функций

Функция	Производная	Первообразная
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\sec x$	$\operatorname{tg} x\ \sec x$	$\ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{ctg} x\ \operatorname{cosec} x$	$\ln\left\lvert\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right\rvert + C$

(C — произвольная постоянная).

35. Обратные тригонометрические функции

Арксинусом числа x из отрезка $[-1;1]$ называется такое число $\arcsin x$ из отрезка $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, что его синус равен x.

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1;1],$$

$$\sin \arcsin x = x \quad \forall x \in [-1;1].$$

Арккосинусом числа x из отрезка $[-1;1]$ называется такое число $\arccos x$ из отрезка $[0;\pi]$, что его косинус равен x.

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi \quad \forall x \in [-1;1],$$

$$\cos \arccos x = x \quad \forall x \in [-1;1].$$

Арктангенсом числа x называется такое число $\operatorname{arctg} x$ из итервала $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, что его тангенс равен x.

$$\boxed{\begin{gathered} -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{tg} \operatorname{arctg} x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{gathered}}$$

Арккотангенсом числа x называется такое число $\operatorname{arcctg} x$ из интервала $(0;\pi)$, что его котангенс равен x.

$$\boxed{\begin{gathered} 0 < \operatorname{arcctg} x < \pi \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{ctg} \operatorname{arcctg} x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{gathered}}$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad \forall x \in [-1;1].$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad \forall x \in [-1;1].$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1;1].$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\arcsin \sin x = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

$$\arccos \cos x = x \quad \forall x \in [0;\pi].$$

$$\operatorname{arctg} \operatorname{tg} x = x \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\operatorname{arcctg} \operatorname{ctg} x = x \quad \forall x \in (0;\pi).$$

$$\cos \arcsin x = \sqrt{1-x^2} \quad \forall x \in [-1;1].$$

$$\operatorname{tg} \arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1;1).$$

$$\operatorname{ctg} \arcsin x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \forall x \in [-1;0) \cup (0;1].$$

$$\sin \arccos x = \sqrt{1-x^2} \quad \forall x \in [-1;1].$$

$$\operatorname{tg} \arccos x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \forall x \in [-1; 0) \cup (0; 1].$$

$$\operatorname{ctg} \arccos x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1; 1).$$

$$\sin \operatorname{arctg} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos \operatorname{arctg} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{ctg} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

$$\sin \operatorname{arcctg} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos \operatorname{arcctg} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{tg} \operatorname{arcctg} x = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} \quad \forall x \in (0; 1).$$

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (0; 1).$$

$$\arcsin x = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \forall x \in (0; 1).$$

$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2} \quad \forall x \in (0; 1).$$

$$\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \forall x \in (0; 1).$$

$$\arccos x = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (0; 1).$$

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in (0; +\infty).$$

$$\operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in (0;\, +\infty).$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} \quad \forall x \in (0;\, +\infty).$$

$$\operatorname{arcctg} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in (0;\, +\infty).$$

$$\operatorname{arcctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in (0;\, +\infty).$$

$$\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \quad \forall x \in (0;\, +\infty).$$

36. Преобразование суммы обратных тригонометрических функций

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\big(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\,\big),$$
$$\text{если } \ xy \leqslant 0 \ \text{ или } \ x^2+y^2 \leqslant 1.$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \pi - \arcsin\big(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\,\big),$$
$$\text{если } \ x>0,\ y>0 \ \text{ и } \ x^2+y^2 > 1.$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \ -\pi - \arcsin\big(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\,\big),$$
$$\text{если } \ x<0,\ y<0 \ \text{ и } \ x^2+y^2 > 1.$$

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\big(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\,\big),$$
$$\text{если } \ xy \geqslant 0 \ \text{ или } \ x^2+y^2 \leqslant 1.$$

$$\arcsin x - \arcsin y = \pi - \arcsin\big(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\,\big),$$
$$\text{если } \ x>0,\ y<0 \ \text{ и } \ x^2+y^2 > 1.$$

$$\arcsin x - \arcsin y = \ -\pi - \arcsin\big(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\,\big),$$
$$\text{если } \ x<0,\ y>0 \ \text{ и } \ x^2+y^2 > 1.$$

$$\arccos x + \arccos y = \arccos\big(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\,\big), \ \text{ если } x+y \geqslant 0.$$

$$\arccos x + \arccos y = 2\pi - \arccos\bigl(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\,\bigr),$$
$$\text{если } \ x + y < 0.$$

$$\arccos x - \arccos y = -\arccos\bigl(xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\,\bigr), \text{ если } \ x - y \geqslant 0.$$

$$\arccos x - \arccos y = \arccos\bigl(xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\,\bigr), \text{ если } \ x - y < 0.$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}\,, \quad \text{если } xy < 1.$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \pi + \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}\,, \quad \text{если } \ x > 0 \ \text{ и } \ xy > 1.$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}\,, \quad \text{если } \ x < 0 \ \text{ и } \ xy > 1.$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}\,, \quad \text{если } \ xy > -1.$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \pi + \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}\,, \quad \text{если } \ x > 0 \ \text{ и } \ xy < -1.$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}\,, \quad \text{если } \ x < 0 \ \text{ и } \ xy < -1.$$

$$2\arcsin x = \arcsin\bigl(2x\sqrt{1-x^2}\,\bigr), \quad \text{если } \ |x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

$$2\arcsin x = \pi - \arcsin\bigl(2x\sqrt{1-x^2}\,\bigr), \quad \text{если } \ \frac{\sqrt{2}}{2} < x \leqslant 1.$$

$$2\arcsin x = -\pi - \arcsin\bigl(2x\sqrt{1-x^2}\,\bigr), \quad \text{если } \ -1 \leqslant x < -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

$$2\arccos x = \arccos(2x^2 - 1), \quad \text{если } \ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

$$2\arccos x = 2\pi - \arccos(2x^2 - 1), \quad \text{если } \ -1 \leqslant x < 0.$$

$$2\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}\,, \quad \text{если } \ |x| < 1.$$

$$2\operatorname{arctg} x = \pi + \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}, \quad \text{если } x > 1.$$

$$2\operatorname{arctg} x = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}, \quad \text{если } x < -1.$$

37. Свойства и графики обратных тригонометрических функций

37.1. Функция $y(x) = \arcsin x$

Арксинус — функция обратная к сужению синуса на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

1°. *Область определения* $\mathrm{D}(\arcsin x) = [-1; 1]$.

2°. *Множество значений* $\mathrm{E}(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3°. *Нечетная*: $\arcsin(-x) = -\arcsin x \ \ \forall x \in [-1; 1]$. График симметричен относительно начала координат (рис. 51).

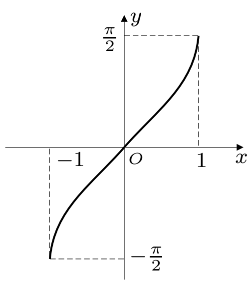


Рис. 51

4°. *Непериодическая.*

5°. *Нуль* $x = 0$.

6°. *Промежутки знакопостоянства.* Положительная на полуинтервале $(0; 1]$; отрицательная на полуинтервале $[-1; 0)$.

7°. *Промежутки монотонности.* Возрастает на отрезке $[-1; 1]$.

8°. *Дифференцируемая.* Критических точек нет.

9°. *Выпуклость и вогнутость.* Выпуклая на отрезке $[0; 1]$; вогнутая на отрезке $[-1; 0]$. Точка перегиба $(0, 0)$.

10°. *Точек экстремума* нет.

11°. *Асимптот* нет.

12°. *Наибольшее значение* $\max\limits_{[-1;1]}(\arcsin x) = \frac{\pi}{2}$ достигается в точке $x = 1$; наименьшее значение $\min\limits_{[-1;1]}(\arcsin x) = -\frac{\pi}{2}$ достигается в точке $x = -1$.

37.2. Функция $y(x) = \arccos x$

Арккосинус — функция обратная к сужению косинуса на $[0; \pi]$.

1°. *Область определения* $\mathrm{D}(\arccos x) = [-1; 1]$.

2°. *Множество значений* $\mathrm{E}(\arccos x) = [0; \pi]$.

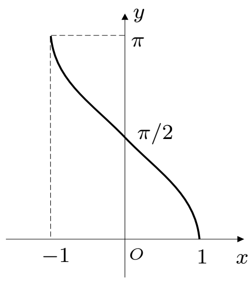


Рис. 52

3°. *Не является ни четной, ни нечетной* (рис. 52).

4°. *Непериодическая.*

5°. *Нуль* $x = 1$.

6°. *Промежутки знакопостоянства.* Положительная на полуинтервале $[-1; 1)$.

7°. *Промежутки монотонности.* Убывает на отрезке $[-1; 1]$.

8°. *Дифференцируемая.* Критических точек нет.

9°. *Точек экстремума* нет.

10°. *Выпуклость и вогнутость.* Выпуклая на отрезке $[-1; 0]$; вогнутая на отрезке $[0; 1]$. Точка перегиба $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

11°. *Асимптот* нет.

12°. *Наибольшее и наименьшее значения.* Наибольшее значение $\max\limits_{[-1;1]}(\arccos x) = \pi$ достигается в точке $x = -1$; наименьшее значение $\min\limits_{[-1;1]}(\arccos x) = 0$ достигается в точке $x = 1$.

37.3. Функция $y(x) = \operatorname{arctg} x$

Арктангенс — функция обратная к сужению тангенса на интервал $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

1°. *Область определения* $\mathrm{D}(\operatorname{arctg} x) = \mathbb{R}$.

2°. *Множество значений* $\mathrm{E}(\operatorname{arctg} x) = \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

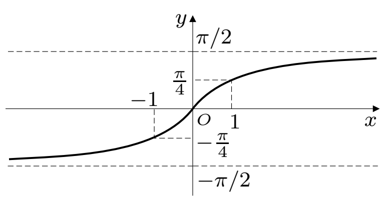


Рис. 53

3°. *Нечетная*:

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

График симметричен относительно начала координат.

4°. *Непериодическая.*

5°. *Нуль* $x = 0$.

6°. *Промежутки знакопостоянства.* Положительная на числовом луче $(0; +\infty)$; отрицательная на числовом луче $(-\infty; 0)$.

7°. *Промежутки монотонности.* Возрастает на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ (рис. 53).

8°. *Дифференцируемая* на $\mathbb{R}$. Критических точек нет.

9°. *Точек экстремума* нет.

10°. *Выпуклость и вогнутость.* Выпуклая на числовом луче $(-\infty; 0]$; вогнутая на числовом луче $[0; +\infty)$. Точка перегиба $(0, 0)$.

11°. *Горизонтальные асимптоты* $y = -\dfrac{\pi}{2}$ и $y = \dfrac{\pi}{2}$.

12°. *Наибольших и наименьших значений* нет.

37.4. Функция $y(x) = \operatorname{arcctg} x$

Арккотангенс — функция обратная к сужению котангенса на интервал $(0; \pi)$.

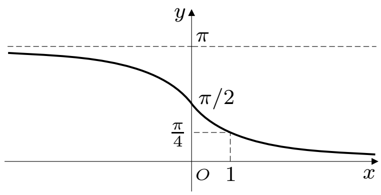


Рис. 54

1°. *Область определения* $\mathrm{D}(\operatorname{arcctg} x) = \mathbb{R}$.

2°. *Множество значений* $\mathrm{E}(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi)$.

3°. *Не является ни четной, ни нечетной* (рис. 54).

4°. *Непериодическая.*

5°. *Нулей* нет. График не пересекает оси абсцисс.

6°. *Промежутки знакопостоянства.* Положительная на всей числовой прямой $\mathbb{R}$.

7°. *Промежутки монотонности.* Убывает на всей числовой прямой $\mathbb{R}$.

8°. *Дифференцируемая* на $\mathbb{R}$. Критических точек нет.

9°. *Точек экстремума* нет.

10°. *Выпуклость и вогнутость.* Выпуклая на числовом луче $[0; +\infty)$; вогнутая на числовом луче $(-\infty; 0]$. Точка перегиба $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

11°. *Горизонтальные асимптоты* $y = 0$ и $y = \pi$.

12°. *Наибольших и наименьших значений* нет.

37.5. Графики обратных тригонометрических функций от тригонометрических функций

37.5.1. Функция $y(x) = \arcsin \sin x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (рис. 55).

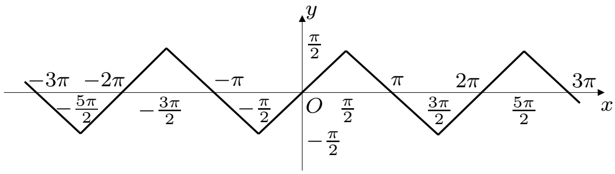


Рис. 55

37.5.2. Функция $y(x) = \arccos\cos x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (рис. 56).

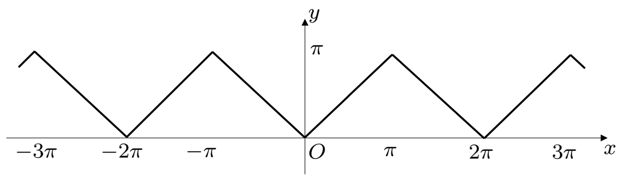


Рис. 56

37.5.3. Функция $y(x) = \operatorname{arctg} \operatorname{tg} x$ $\forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ (график построен на рис. 57).

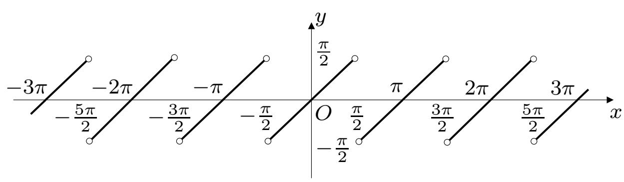


Рис. 57

37.5.4. Функция $y(x) = \operatorname{arcctg} \operatorname{ctg} x$ $\forall x \in \big(\pi k;\ \pi(k+1)\big)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ (график построен на рис. 58).

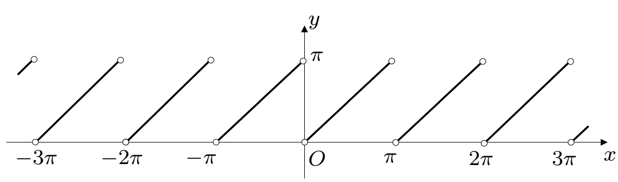


Рис. 58

38. Дифференцирование и интегрирование обратных тригонометрических функций

Функция	Производная	Первообразная
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall\, x \in (-1;\ 1)$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall\, x \in (-1;\ 1)$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \operatorname{arcctg} x + \dfrac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$

(C — произвольная постоянная).

39. Равенство тригонометрических функций

39.1. $\cos x = \cos y$

$$\cos x = \cos y \iff x = \pm y + 2\pi n \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

39.2. $\sin x = \sin y$

$$\sin x = \sin y \iff \left[\begin{array}{l} x = y + 2\pi n, \\ x = \pi - y + 2\pi n \end{array}\right. \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

39.3. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \iff x = y + \pi n$$

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \ \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi l; \frac{\pi}{2} + \pi l\right), \ \forall k, l, n \in \mathbb{Z}.$$

39.4. $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y$

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y \iff x = y + \pi n$$

$$\forall x \in (\pi k; \pi(k+1)), \ \forall y \in (\pi l; \pi(l+1)), \ \forall k, l, n \in \mathbb{Z}.$$

39.5. $\cos x = -\cos y$

$$\cos x = -\cos y \iff x = \pi \pm y + 2\pi n \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

39.6. $\sin x = -\sin y$

$$\sin x = -\sin y \iff \left[\begin{array}{l} x = -y + 2\pi n, \\ x = \pi + y + 2\pi n \end{array}\right. \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

39.7. $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} y$

$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} y \iff x = -y + \pi n$$

$$\forall x \in \Big(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\Big), \; \forall y \in \Big(-\frac{\pi}{2} + \pi l; \frac{\pi}{2} + \pi l\Big), \; \forall k, l, n \in \mathbb{Z}.$$

39.8. $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg} y$

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg} y \iff x = -y + \pi n$$

$$\forall x \in (\pi k; \pi(k+1)), \quad \forall y \in (\pi l; \pi(l+1)), \quad \forall k, l, n \in \mathbb{Z}.$$

39.9. $\sin x = \cos y$

$$\sin x = \cos y \iff x = \frac{\pi}{2} \pm y + 2\pi n \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

39.10. $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y \iff x = \frac{\pi}{2} - y + \pi n$$

$$\forall x \in \Big(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\Big), \quad \forall y \in (\pi l; \pi(l+1)), \quad \forall k, l, n \in \mathbb{Z}.$$

39.11. $\sin x = -\cos y$

$$\sin x = -\cos y \iff x = -\frac{\pi}{2} \pm y + 2\pi n \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

39.12. $\operatorname{tg} x = -\operatorname{ctg} y$

$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{ctg} y \iff x = \frac{\pi}{2} + y + \pi n$$

$$\forall x \in \Big(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)\Big), \quad \forall y \in (\pi l; \pi(l+1)), \quad \forall k, l, n \in \mathbb{Z}.$$

40. Решение простейших тригонометрических уравнений

40.1. Уравнение $\sin t = a$

Если $|a| > 1$, то уравнение $\sin t = a$ не имеет решений.
Если $|a| \leqslant 1$, то множеством решений будет

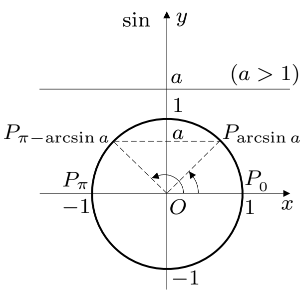
$$\{(-1)^n \arcsin a + \pi n\} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \text{ (рис. 59 и рис. 60).}$$

В частности,

$$\sin t = 0 \iff t = \pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

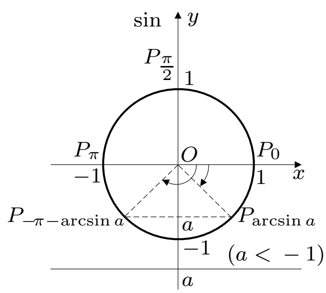
$$\sin t = -1 \iff t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

$$\sin t = 1 \iff t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$



Случай $a \geqslant 0$

Рис. 59



Случай $a \leqslant 0$

Рис. 60

40.2. Уравнение $\cos t = a$

Если $|a| > 1$, то уравнение $\cos t = a$ не имеет решений.
Если $|a| \leqslant 1$, то множеством решений будет

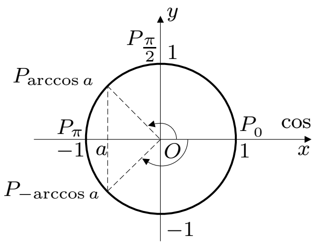
$$\{\pm \arccos a + 2\pi n\} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \text{ (рис. 61 и рис. 62).}$$

В частности,

$$\cos t = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

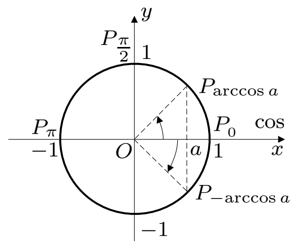
$$\cos t = -1 \iff t = \pi + 2\pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

$$\cos t = 1 \iff t = 2\pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$



Случай $-1 \leqslant a \leqslant 0$

Рис. 61



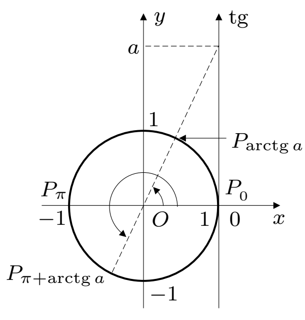
Случай $0 \leqslant a \leqslant 1$

Рис. 62

40.3. Уравнение $\operatorname{tg} t = a$

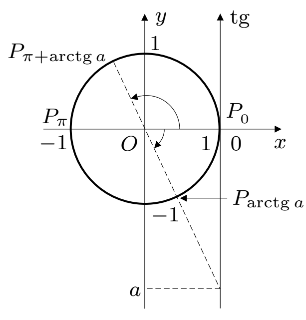
При любом действительном a множеством решений будет

$\{\operatorname{arctg} a + \pi n\}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ (рис. 63 и рис. 64).



Случай $a \geqslant 0$

Рис. 63



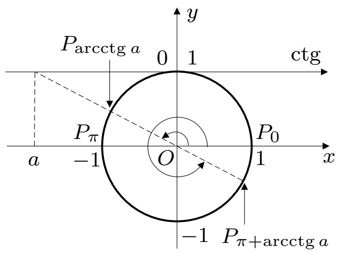
Случай $a \leqslant 0$

Рис. 64

40.4. Уравнение $\operatorname{ctg} t = a$

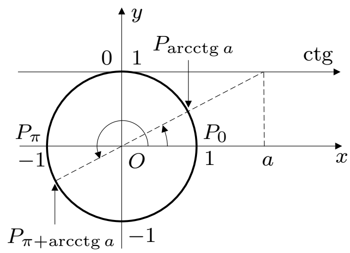
При любом действительном a множеством решений будет

$\{\operatorname{arcctg} a + \pi n\}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. (рис. 65 и рис. 66).



Случай $a \leqslant 0$

Рис. 65



Случай $a \geqslant 0$

Рис. 66

41. Простейшие тригонометрические неравенства

41.1. Неравенство $\sin t < a$

Если $a \leqslant -1$, то неравенство решений не имеет.

Если $a > 1$, то решением будет любое действительное число t.

Если $-1 < a \leqslant 1$, то решениями будут такие числа t, которые удовлетворяют хотя бы одному из двойных неравенств

$$\pi - \arcsin a + 2\pi n < t < 2\pi + \arcsin a + 2\pi n,$$

где n — любое целое число.

А. *Графическое решение* (рис. 67 и 68).

С учетом 2π-периодичности функции синус находим множество значений независимой переменной t, при которых синусоида лежит ниже горизонтальной прямой $y = a$.

Б. *Решение с помощью единичной окружности.*

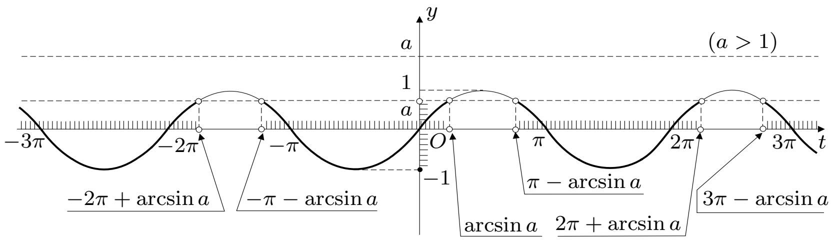
Ход рассуждений при $-1 < a \leqslant 1$ (рис. 69 и 70).

1. На оси ординат откладываем полуинтервал $[-1; a)$, что соответствует неравенству $\sin t < a$.

2. На единичной окружности выделяем дугу, каждая точка P_t которой проецируется на полуинтервал $[-1; a)$ оси ординат. Это дуга $\smile P_{\pi - \arcsin a} P_{2\pi + \arcsin a}$ без концов.

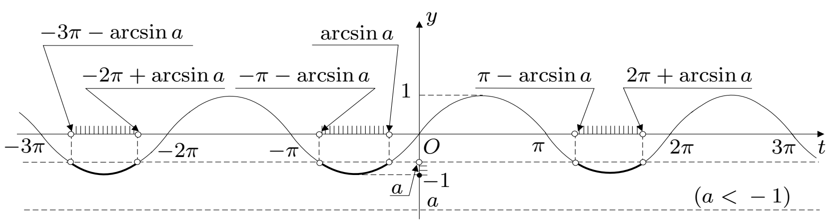
3. С учетом периода записываем все множество значений t таких, что точки P_t лежат на выделенной дуге. Этим множеством является объединение интервалов

$$(\pi - \arcsin a + 2\pi n; 2\pi + \arcsin a + 2\pi n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$



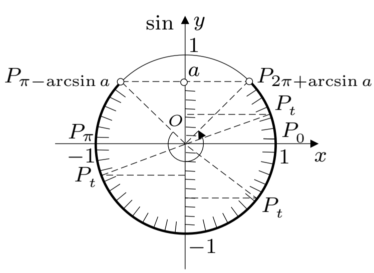
Случай $a \geqslant 0$

Рис. 67



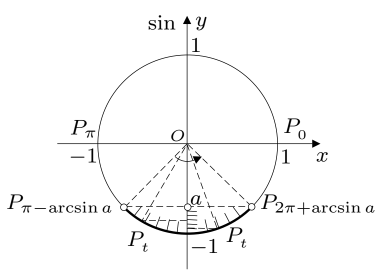
Случай $a \leqslant 0$

Рис. 68



Случай $a \geqslant 0$

Рис. 69



Случай $a \leqslant 0$

Рис. 70

41.2. Неравенство $\sin t > a$

Если $a \geqslant 1$, то неравенство решений не имеет.

Если $a < -1$, то решением будет любое действительное число t.

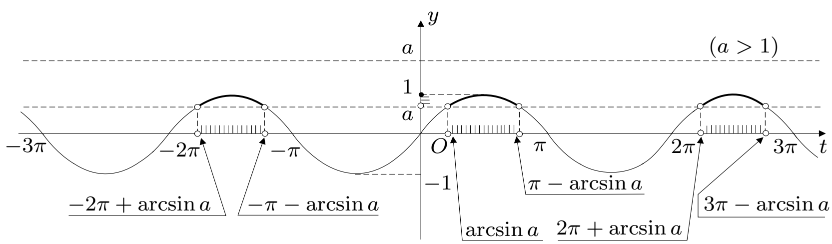
Если $-1 \leqslant a < 1$, то решениями будут такие числа t, которые удовлетворяют хотя бы одному из двойных неравенств

$$\arcsin a + 2\pi n < t < \pi - \arcsin a + 2\pi n,$$

где n — любое целое число.

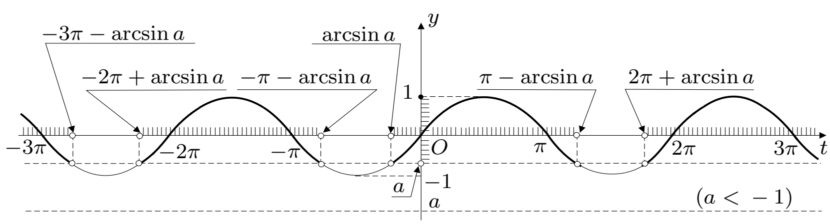
А. *Графическое решение* (рис. 71 и 72).

С учетом 2π-периодичности функции синус находим множество значений независимой переменной t, при которых синусоида лежит выше горизонтальной прямой $y = a$.



Случай $a \geqslant 0$

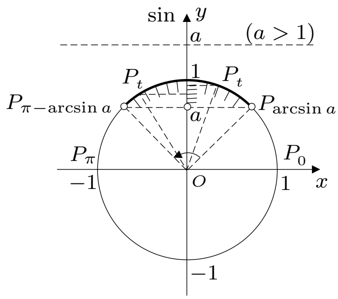
Рис. 71



Случай $a \leqslant 0$

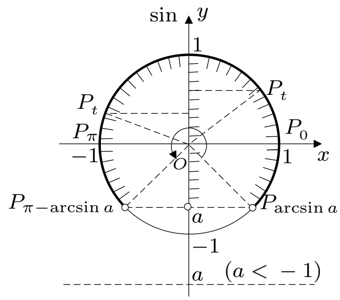
Рис. 72

Б. *Решение с помощью единичной окружности.*



Случай $a \geqslant 0$

Рис. 73



Случай $a \leqslant 0$

Рис. 74

Ход рассуждений при $-1 \leqslant a < 1$ (рис. 73 и 74).

1. На оси ординат откладываем полуинтервал $(a; 1]$, что соответствует неравенству $\sin t > a$.

2. На единичной окружности выделяем дугу, каждая точка P_t которой проецируется на полуинтервал $(a; 1]$ оси ординат. Это дуга $\smile P_{\arcsin a} P_{\pi - \arcsin a}$ без концов.

3. С учетом периода записываем все множество значений t таких, что точки P_t лежат на выделенной дуге. Этим множеством является объединение интервалов

$$(\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

41.3. Неравенство $\cos t < a$

Если $a \leqslant -1$, то неравенство решений не имеет.

Если $a > 1$, то решением будет любое действительное число t.

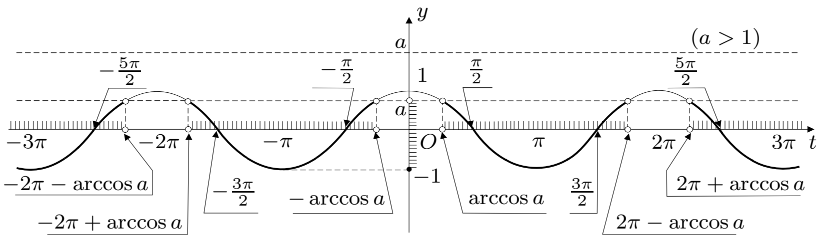
Если $-1 < a \leqslant 1$, то решениями будут такие числа t, которые удовлетворяют хотя бы одному из двойных неравенств

$$\arccos a + 2\pi n < t < 2\pi - \arccos a + 2\pi n,$$

где n — любое целое число.

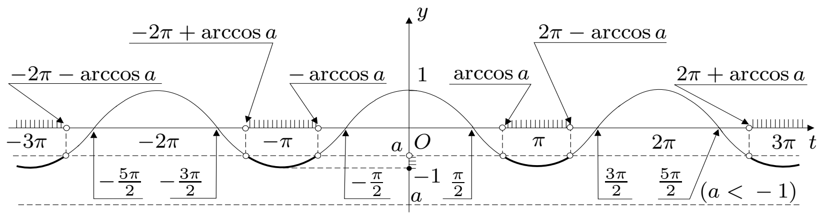
А. *Графическое решение* (рис. 75 и 76).

С учетом 2π-периодичности функции косинус находим множество значений независимой переменной t, при которых косинусоида лежит ниже горизонтальной прямой $y = a$.



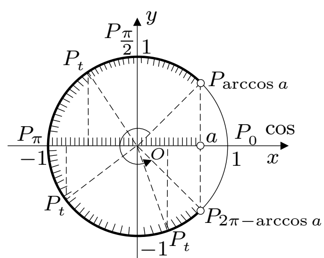
Случай $a \geqslant 0$

Рис. 75



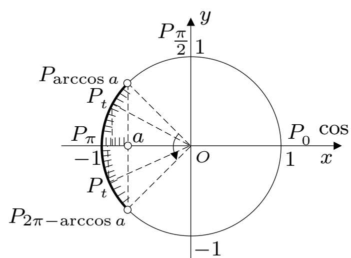
Случай $a \leqslant 0$

Рис. 76



Случай $a \geqslant 0$

Рис. 77



Случай $a \leqslant 0$

Рис. 78

Б. *Решение с помощью единичной окружности.*

Ход рассуждений при $-1 < a \leqslant 1$ (рис. 77 и 78).

1. На оси абсцисс откладываем полуинтервал $[-1; a)$, что соответствует неравенству $\cos t < a$.

2. На единичной окружности выделяем дугу, каждая точка P_t которой проецируется на полуинтервал $[-1; a)$ оси абсцисс. Это дуга $\smile P_{\arccos a} P_{2\pi - \arccos a}$ без концов.

3. С учетом периода записываем все множество значений t таких, что точки P_t лежат на выделенной дуге. Этим множеством является объединение интервалов

$$(\arccos a + 2\pi n; 2\pi - \arccos a + 2\pi n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

41.4. Неравенство $\cos t > a$

Если $a \geqslant 1$, то неравенство решений не имеет.

Если $a < -1$, то решением будет любое действительное число t.

Если $-1 \leqslant a < 1$, то решениями будут такие числа t, которые удовлетворяют хотя бы одному из двойных неравенств

$$-\arccos a + 2\pi n < t < \arccos a + 2\pi n,$$

где n — любое целое число.

А. *Графическое решение* (рис. 79 и 80).

С учетом 2π-периодичности функции косинус находим множество значений независимой переменной t, при которых косинусоида лежит выше горизонтальной прямой $y = a$.

Б. *Решение с помощью единичной окружности.*

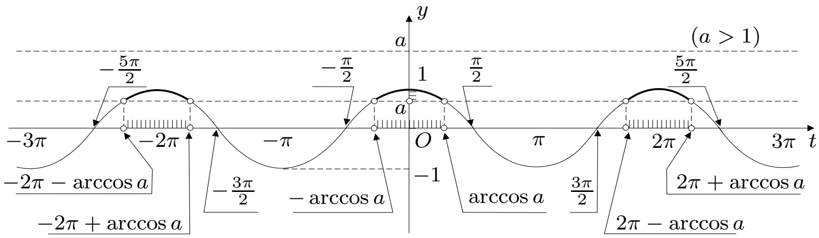
Ход рассуждений при $-1 \leqslant a < 1$ (рис. 81 и 82).

1. На оси абсцисс откладываем полуинтервал $(a; 1]$, что соответствует неравенству $\cos t > a$.

2. На единичной окружности выделяем дугу, каждая точка P_t которой проецируется на полуинтервал $(a; 1]$ оси абсцисс. Это дуга $\smile P_{-\arccos a} P_{\arccos a}$ без концов.

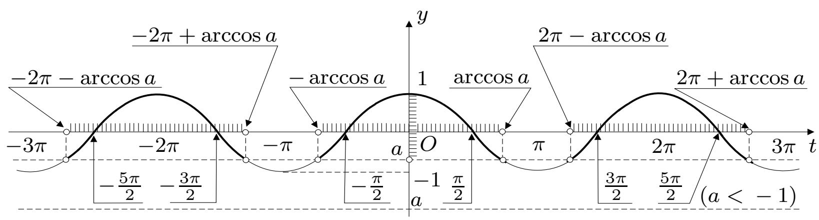
3. С учетом периода записываем все множество значений t таких, что точки P_t лежат на выделенной дуге. Этим множеством является объединение интервалов

$$(-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$



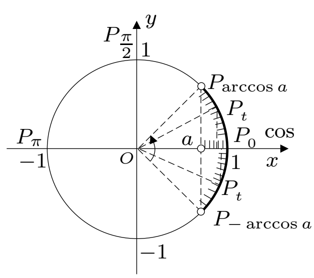
Случай $a \geqslant 0$

Рис. 79



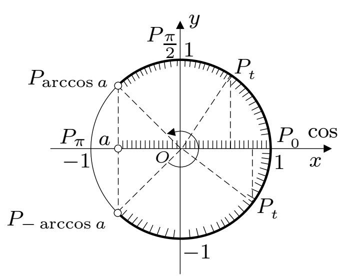
Случай $a \leqslant 0$

Рис. 80



Случай $a \geqslant 0$

Рис. 81



Случай $a \leqslant 0$

Рис. 82

41.5. Неравенство $\operatorname{tg} t < a$

При любом действительном a множеством решений является объединение интервалов

$$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \operatorname{arctg} a+\pi n\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

А. *Графическое решение* дано на рис. 83.

С учетом π-периодичности функции тангенс и того, что она определена на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi m; \frac{\pi}{2}+\pi m\right)$ $\forall m \in \mathbb{Z}$, находим множество значений независимой переменной t, при которых тангенсоида лежит ниже горизонтальной прямой $y=a$.

Б. *Решение с помощью единичной окружности.*

Ход рассуждений (рис. 84).

1. На оси тангенсов (прямая $x=1$) откладываем луч $(-\infty; a)$, что соответствует неравенству $\operatorname{tg} t < a$.

2. На единичной окружности выделяем дуги, каждая точка P_t которых такая, что прямые OP_t пересекают ось тангенсов на луче $(-\infty; a)$. Это дуги $\smile P_{-\frac{\pi}{2}} P_{\operatorname{arctg} a}$ и $\smile P_{\frac{\pi}{2}} P_{\pi+\operatorname{arctg} a}$ без концов.

3. С учетом периода записываем все множество значений t таких, что точки P_t лежат на выделенных дугах.

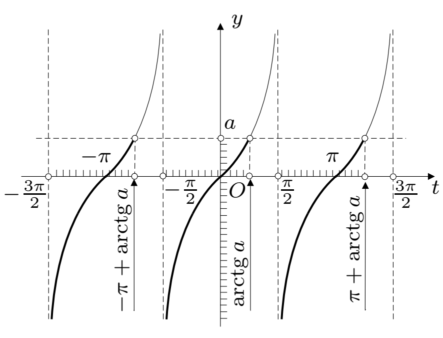


Рис. 83

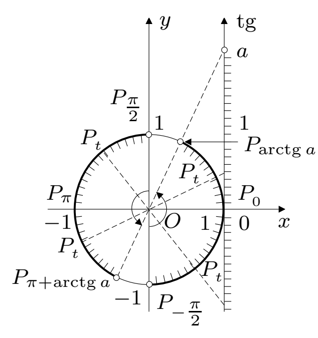


Рис. 84

41.6. Неравенство $\operatorname{tg} t > a$

При любом действительном a множеством решений является объединение интервалов

$$\left(\operatorname{arctg} a + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

А. *Графическое решение* дано на рис. 85.

С учетом π-периодичности функции тангенс и того, что она определена на интервалах $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi m; \dfrac{\pi}{2} + \pi m\right)$ $\forall m \in \mathbb{Z}$, находим множество значений независимой переменной t, при которых тангенсоида лежит выше горизонтальной прямой $y = a$.

Б. *Решение с помощью единичной окружности.*

Ход рассуждений (рис. 86).

1. На оси тангенсов (прямая $x = 1$) откладываем луч $(a; +\infty)$, что соответствует неравенству $\operatorname{tg} t > a$.

2. На единичной окружности выделяем дуги, каждая точка P_t которых такая, что прямые OP_t пересекают ось тангенсов на луче $(a; +\infty)$. Это дуги $\smile P_{\operatorname{arctg} a} P_{\frac{\pi}{2}}$ и $\smile P_{\pi + \operatorname{arctg} a} P_{\frac{3\pi}{2}}$ без концов.

3. С учетом периода записываем все множество значений t таких, что точки P_t лежат на выделенных дугах.

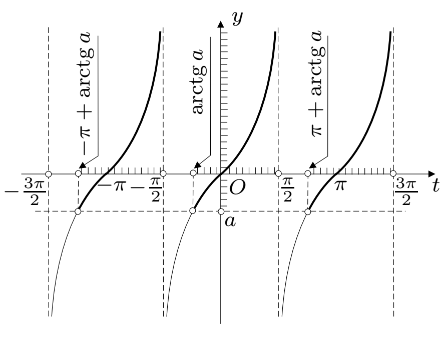


Рис. 85

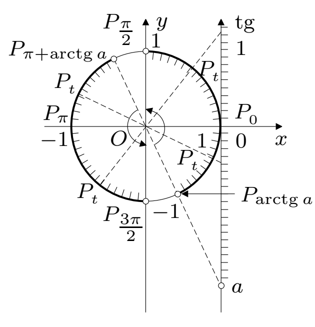


Рис. 86

41.7. Неравенство $\operatorname{ctg} t < a$

При любом действительном a множеством решений является объединение интервалов

$$(\operatorname{arcctg} a + \pi n; \pi + \pi n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

А. *Графическое решение* дано на рис. 87.

С учетом π-периодичности функции котангенс и того, что она определена на интервалах $(\pi m; \pi(m+1))$ $\forall m \in \mathbb{Z}$, находим множество значений независимой переменной t, при которых котангенсоида лежит ниже горизонтальной прямой $y = a$.

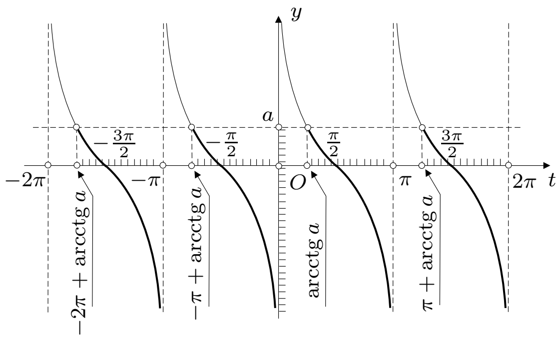


Рис. 87

Б. *Решение с помощью единичной окружности.*

Ход рассуждений (рис. 88).

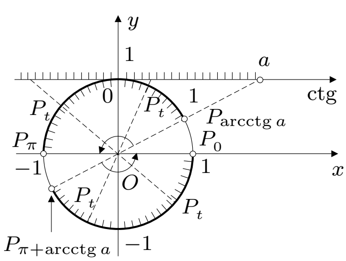


Рис. 88

1. На оси котангенсов (прямая $y = 1$) откладываем луч $(-\infty; a)$, что соответствует строгому неравенству $\operatorname{ctg} t < a$.

2. На единичной окружности выделяем дуги, каждая точка P_t которых такая, что прямые OP_t пересекают ось котангенсов на луче $(-\infty; a)$. Это дуги $\smile P_{\operatorname{arctg} a} P_\pi$ и $\smile P_{\pi + \operatorname{arctg} a} P_{2\pi}$ без концов.

3. С учетом периода записываем все множество значений t таких, что точки P_t лежат на выделенных дугах.

41.8. Неравенство $\operatorname{ctg} t > a$

При любом действительном a множеством решений является объединение интервалов

$$(\pi n; \operatorname{arcctg} a + \pi n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

А. *Графическое решение* дано на рис. 89.

С учетом π-периодичности функции котангенс и того, что она определена на интервалах $(\pi m; \pi(m+1))$ $\forall m \in \mathbb{Z}$, находим множество значений независимой переменной t, при которых котангенсоида лежит выше горизонтальной прямой $y = a$.

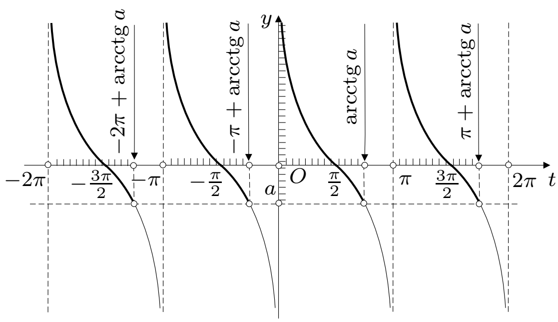


Рис. 89

Б. *Решение с помощью единичной окружности.*

Ход рассуждений (рис. 90).

1. На оси котангенсов (прямая $y = 1$) откладываем луч $(a; +\infty)$, что соответствует строгому неравенству $\operatorname{ctg} t > a$.

2. На единичной окружности выделяем дуги, каждая точка P_t которых такая, что прямые OP_t пересекают ось котангенсов на луче $(a; +\infty)$. Это дуги $\smile P_0 P_{\operatorname{arctg} a}$ и $\smile P_\pi P_{\pi + \operatorname{arctg} a}$ без концов.

3. С учетом периода записываем все множество значений t таких, что точки P_t лежат на выделенных дугах.

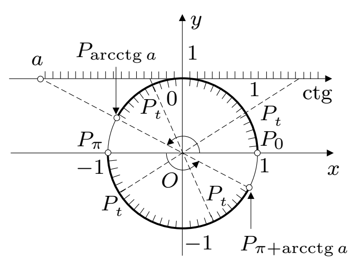


Рис. 90

42. Обратные тригонометрические уравнения

42.1. Уравнение $\arcsin x = a$

Если $|a| > \dfrac{\pi}{2}$, то уравнение решений не имеет.

Если $|a| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, то решением будет $x = \sin a$.

42.2. Уравнение $\arcsin f(x) = g(x)$

$$\arcsin f(x) = g(x) \iff$$

$$\iff \begin{cases} |f(x)| \leqslant 1, \\ |g(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ f(x) = \sin g(x) \end{cases} \iff \begin{cases} |g(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ f(x) = \sin g(x). \end{cases}$$

42.3. Уравнение $\arccos x = a$

Если $a < 0$ или $a > \pi$, то уравнение решений не имеет.

Если $0 \leqslant a \leqslant \pi$, то решением будет $x = \cos a$.

42.4. Уравнение $\arccos f(x) = g(x)$

$$\arccos f(x) = g(x) \iff$$

$$\iff \begin{cases} |f(x)| \leqslant 1, \\ 0 \leqslant g(x) \leqslant \pi, \\ f(x) = \cos g(x) \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant g(x) \leqslant \pi, \\ f(x) = \cos g(x). \end{cases}$$

42.5. Уравнение $\operatorname{arctg} x = a$

Если $|a| \geqslant \dfrac{\pi}{2}$, то уравнение решений не имеет.

Если $|a| < \dfrac{\pi}{2}$, то решением будет $x = \operatorname{tg} a$.

42.6. Уравнение $\operatorname{arctg} f(x) = g(x)$

$$\operatorname{arctg} f(x) = g(x) \iff \begin{cases} |g(x)| < \dfrac{\pi}{2}, \\ f(x) = \operatorname{tg} g(x). \end{cases}$$

42.7. Уравнение $\operatorname{arcctg} x = a$

Если $a \leqslant 0$ или $a \geqslant \pi$, то уравнение решений не имеет.

Если $0 < a < \pi$, то решением будет $x = \operatorname{ctg} a$.

42.8. Уравнение $\operatorname{arcctg} f(x) = g(x)$

$$\operatorname{arcctg} f(x) = g(x) \iff \begin{cases} 0 < g(x) < \pi, \\ f(x) = \operatorname{ctg} g(x). \end{cases}$$

43. Простейшие обратные тригонометрические неравенства

43.1. Неравенство $\arcsin x < a$ (рис. 91)

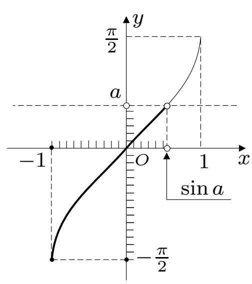


Рис. 91

Если $a \leqslant -\dfrac{\pi}{2}$, то неравенство решений не имеет.

Если $a > \dfrac{\pi}{2}$, то множеством решений будет отрезок $[-1; 1]$.

Если $-\dfrac{\pi}{2} < a \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, то множеством решений будет полуинтервал $[-1; \sin a)$.

43.2. Неравенство $\arcsin x > a$ (рис. 92)

Если $a \geqslant \dfrac{\pi}{2}$, то неравенство решений не имеет.

Если $a < -\dfrac{\pi}{2}$, то множеством решений будет отрезок $[-1; 1]$.

Если $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant a < \dfrac{\pi}{2}$, то множеством решений будет полуинтервал $(\sin a; 1]$.

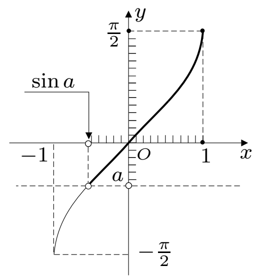


Рис. 92

43.3. Неравенство $\arccos x < a$ (рис. 93)

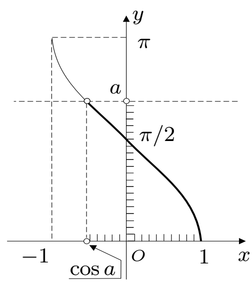


Рис. 93

Если $a > \pi$, то множеством решений будет отрезок $[-1; 1]$.

Если $a \leqslant 0$, то решений нет.

Если $0 < a \leqslant \pi$, то множеством решений будет полуинтервал $(\cos a; 1]$.

43.4. Неравенство $\arccos x > a$ (рис. 94)

Если $a \geqslant \pi$, то решений нет.

Если $a < 0$, то множеством решений будет отрезок $[-1; 1]$.

Если $0 \leqslant a < \pi$, то множеством решений будет полуинтервал $[-1; \cos a)$.

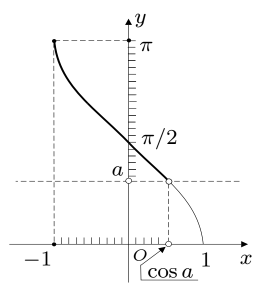


Рис. 94

43.5. Неравенство $\mathbf{arctg}\, \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a}$ (рис. 95)

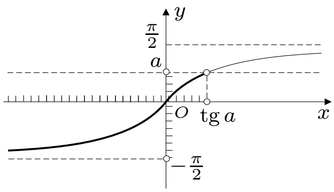


Рис. 95

Если $a \geqslant \dfrac{\pi}{2}$, то множеством решений будет $\mathbb{R}$.

Если $a \leqslant -\dfrac{\pi}{2}$, то решений нет.

Если $|a| < \dfrac{\pi}{2}$, то множеством решений будет числовой луч $(-\infty; \operatorname{tg} a)$.

43.6. Неравенство $\mathbf{arctg}\, \boldsymbol{x} > \boldsymbol{a}$ (рис. 96)

Если $a \geqslant \dfrac{\pi}{2}$, то решений нет.

Если $a \leqslant -\dfrac{\pi}{2}$, то множеством решений будет $\mathbb{R}$.

Если $|a| < \dfrac{\pi}{2}$, то множеством решений будет числовой луч $(\operatorname{tg} a; +\infty)$.

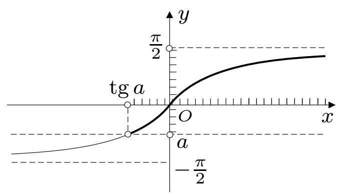


Рис. 96

43.7. Неравенство $\mathbf{arcctg}\, \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a}$ (рис. 97)

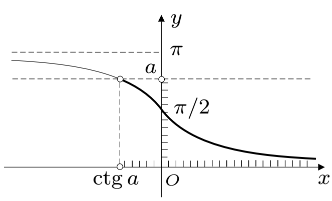


Рис. 97

Если $a \geqslant \pi$, то множеством решений будет $\mathbb{R}$.

Если $a \leqslant 0$, то решений нет.

Если $0 < a < \pi$, то множеством решений будет числовой луч $(\operatorname{ctg} a; +\infty)$.

43.8. Неравенство $\operatorname{arcctg} x > a$ (рис. 98)

Если $a \geqslant \pi$, то решений нет.

Если $a \leqslant 0$, то множеством решений будет $\mathbb{R}$.

Если $0 < a < \pi$, то множеством решений будет числовой луч $(-\infty; \operatorname{ctg} a)$.

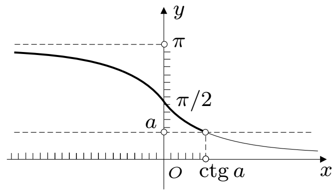


Рис. 98

44. Преобразования сложного квадратного корня

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}},$$

где $A > 0,\ B > 0,\ A^2 - B > 0$.

$$\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (a > 0,\ b > 0).$$

$$\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \quad (a > 0,\ b > 0).$$

45. Общие свойства функции

Числовой функцией с областью определения D называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу число y, зависящее от x.

Область определения функции f обозначают $\mathrm{D}(f)$.

Множество, состоящее из всех чисел $f(x)$ таких, что x принадлежит области определения функции f, называется *множеством значений* функции f и обозначается $\mathrm{E}(f)$.

Соглашение. Если функция задана формулой, а ее область определения не указана, то за область определения принимается множество значений независимой переменной, при которых эта формула имеет смысл.

Значения независимой переменной x, при которых значение функции $y = f(x)$ равно нулю, называются *нулями* функции f.

Нулями функции $y = f(x)$ с областью определения $\mathrm{D}(f)$ являются корни уравнения $f(x) = 0$, принадлежащие $\mathrm{D}(f)$.

Числовые промежутки, на которых функция f принимает положительные значения, а также числовые промежутки, на которых функция f принимает отрицательные значения, называются *промежутками знакоопределенности* функции f.

Графиком функции f называется множество всех точек (x, y), где $y = f(x)$, а x «пробегает» всю область определения функции f.

График функции f обозначают Γf.

Подмножество координатной плоскости является графиком какой-либо функции, если оно имеет не более одной общей точки с любой прямой, параллельной оси Oy.

Функция f называется *четной*, если для любого x из ее области определения $f(-x) = f(x)$:

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathrm{D}(f).$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция f называется *нечетной*, если для любого x из ее области определения $f(-x) = -f(x)$:

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathrm{D}(f).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пусть f и g — две функции. *Сложной функцией f от g* называют функцию $y = f(g(x))$.

Сложная функция $y = f(g(x))$ определена при всех тех x, при которых определена функция g и при которых значения $g(x)$ принадлежат области определения функции f.

Функция f называется *периодической* с периодом $T \neq 0$, если для любого x из области определения значения этой функции в точках $x - T$, $x + T$ и x равны:

$$f(x+T) = f(x) = f(x-T) \quad \forall x \in \mathrm{D}(f) \quad (T \neq 0).$$

Функцию с периодом T называют *T-периодической.*

Если f — T-периодическая, то при любом целом $n \neq 0$ число nT тоже период этой функции.

Наименьший положительный период функции принято называть *основным* или *примитивным.*

Если функция f периодическая и имеет период T, то функция $g(x) = Af(kx+b)$, где A, k и b постоянны, а число $k \neq 0$, также периодична, причем ее период равен $\dfrac{T}{|k|}$.

Функция f *возрастает* на числовом промежутке X, если для любых x_1 и x_2 из X, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$:

$$\forall x_1, x_2 \in X\colon\ x_2 > x_1 \implies f(x_2) > f(x_1).$$

Функция f *убывает* на числовом промежутке X, если для любых x_1 и x_2 из X, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$:

$$\forall x_1, x_2 \in X\colon\ x_2 > x_1 \implies f(x_2) < f(x_1).$$

Если на числовом промежутке производная $f' > 0$, то на нем функция f возрастает.

Если на числовом промежутке производная $f' < 0$, то на нем функция f убывает.

Окрестностью точки a называется любой открытый числовой промежуток, содержащий эту точку.

Окрестность точки a будем обозначать $\mathrm{U}(a)$.

Точка x_0 называется *внутренней точкой* множества G, если у нее существует окрестность, вместе с которой она содержится в G.

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции f, если для всех x из некоторой окрестности $\mathrm{U}(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$:

$$\exists \mathrm{U}(x_0)\colon f(x) \geqslant f(x_0) \quad \forall x \in \mathrm{U}(x_0).$$

Значения функции в ее точках минимума называются *минимумами* функции. Точки минимума обозначают $x_{\min}$, а минимумы функции f обозначают $f_{\min}$.

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции f, если для всех x из некоторой окрестности $\mathrm{U}(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$:

$$\exists \mathrm{U}(x_0)\colon f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall x \in \mathrm{U}(x_0).$$

Значения функции в ее точках максимума называются *максимумами* функции. Точки максимума обозначают $x_{\max}$, а максимумы функции f обозначают $f_{\max}$.

Точки минимума и точки максимума называются *точками экстремума* функции. Минимумы и максимумы называются *экстремумами* функции.

Точки экстремума функции являются внутренними точками ее области определения.

При переходе через точку минимума убывание сменяется возрастанием, а при переходе через точку максимума возрастание сменяется убыванием.

Таким образом, при переходе через точки экстремума изменяется характер монотонности функции.

Если внутренняя точка $x = x_0$ из области определения функции f является точкой экстремума функции f, то производная $f'(x_0) = 0$ или в точке $x = x_0$ производная f' не определена.

Внутренняя точка из области определения функции f называется *критической точкой* функции f, если в этой точке производная f' не определена или обращается в нуль.

Если при переходе через критическую точку производная f' меняет знак с минуса на плюс, то это — точка минимума функции f.

Если при переходе через критическую точку производная f' меняет знак с плюса на минус, то это — точка максимума функции f.

Функция f называется *обратимой* на множестве G, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству G, из $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$:

$$\forall x_1, x_2 \in G\colon x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Иными словами, функция обратимая тогда и только тогда, когда разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции.

Функция обратимая тогда и только тогда, когда каждое свое значение она принимает только один раз.

Любая прямая, параллельная оси абсцисс, если пересекает график обратимой функции, то один раз.

Если функция монотонна на числовом промежутке, то она обратима на этом промежутке.

Пусть обратимая функция f определена на числовом промежутке X и имеет в качестве своего множества значений промежуток Y. Поставим в соответствие каждому y из Y то единственное значение x, при котором $f(x) = y$. Тогда получим функцию, для которой область определения есть Y, а множеством значений является X. Эта функция называется *обратной* к функции f и обозначается f^{-1}.

График функции и график обратной к ней функции симметричны относительно биссектрис первого и третьего координатных углов.

Функция f *ограничена снизу*, если существует такое число m, что $f(x) > m \ \forall x \in \mathrm{D}(f)$.

Функция f *ограничена сверху*, если существует такое число M, что $f(x) < M \ \forall x \in \mathrm{D}(f)$.

Функция, ограниченная сверху и снизу, называется *ограниченной*.

Функция f ограничена, если и только если существуют такие числа m и M, что $m < f(x) < M \ \forall x \in \mathrm{D}(f)$.

Если существует такое положительное число M, что имеет место оценка $|f(x)| < M \ \forall x \in \mathrm{D}(f)$, то функция f является ограниченной.

Число m называется *наименьшим значением* функции f, если значения $f(x) \geqslant m \ \forall x \in \mathrm{D}(f)$ и существует такое $x_1 \in \mathrm{D}(f)$, что $f(x_1) = m$.

Число M называется *наибольшим значением* функции f, если значения $f(x) \leqslant M \ \forall x \in \mathrm{D}(f)$ и существует такое $x_2 \in \mathrm{D}(f)$, что $f(x_2) = M$.

Если $f(x) \geqslant m$ для всех x из множества G и существует такое $x_1 \in G$, что $f(x_1) = m$, то число m называется *наименьшим значением функции f на множестве G* и обозначается $\min\limits_{G} f$.

При этом $\min\limits_{\mathrm{D}(f)} f$ — наименьшее значение функции f.

Если $f(x) \leqslant M$ для всех x из множества G и существует такое $x_2 \in G$, что $f(x_2) = M$, то число M называется *наибольшим значением функции f на множестве G* и обозначается $\max\limits_{G} f$.

При этом $\max\limits_{\mathrm{D}(f)} f$ — наибольшее значение функции f.

Содержание

Справочное издание

Гнездовский Юрий Юрьевич,
Горбузов Виктор Николаевич,
Проневич Андрей Францевич

СПРАВОЧНИК ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

Редактор М.В. Вахмянина
Компьютерная верстка: В.В. Блашкевич
Дизайн обложки:

Подписано в печать с готовых диапозитивов . .2009 г.
Формат $60 \times 84/16$.
Бумага газетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл.печ.л. 5,81.
Уч.-изд.л. 4,25. Тираж экз. Заказ

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования «Гродненский государственный
университет имени Янки Купалы»

ЛИ № 02330/0133257 от 30.04.2004.

ЛИ № 02330/0056882 от 30.04.2004.

Пер. Телеграфный, 15а, 230023, Гродно.